Correction : Devoir surveillé n°4 : J sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $4pts(1,5pts+2,5pts)$ Soit sur un cercle trigonométrique d'origine I les points A ; B; C d'abscisses curvilignes respectifs : $\frac{17\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{3}$; $-\frac{23\pi}{6}$

1) Placer sur le cercle trigonométrique ces points
2) En déduire les mesures des angles orientés :
$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC})$; $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

Solution :1) Pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principale de ces points.

$A\left(\frac{17\pi}{4}\right)$: $\frac{17\pi}{4}=\frac{16\pi+\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}$

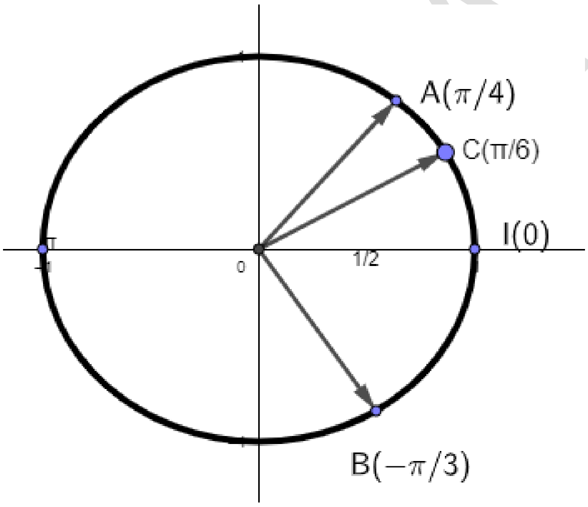
On a : $\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point A

$B\left(\frac{23\pi}{3}\right)$: $\frac{23\pi}{3}=\frac{24\pi-\pi}{3}=\frac{24\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=8\pi-\frac{\pi}{3}$

On a : $-\frac{\pi}{3}\in]-\pi;\pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point B

$C\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$: $-\frac{23\pi}{6}=\frac{-24\pi+\pi}{6}=-\frac{24\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=-4\pi+\frac{\pi}{6}$

On a : $\frac{\pi}{6}\in]-\pi;\pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point C.



2)Remarque : $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})\equiv x_M\,[2\pi]$ avec $M(x_M)$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv x_B-x_A\,[2\pi]$ avec $A(x_A)$ et $B(x_B)$

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI})+(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})[2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv-(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

On a : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice02 : $5pts(1pts\times5)$ Calculer : $A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)$ et $B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

$C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$; $D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$

Solution : $A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$A=\cos\left(6\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$

Donc : $A=-\cos\frac{\pi}{4}+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}$

$C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)=\sin\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$C=\sin\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+1=-\sin\frac{\pi}{3}+1$ Donc : $C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$D=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $D=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$

On a : $\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{14}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$

Donc : $E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$

Donc : $E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$

Donc : $E=\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Exercice03 : $1,5pts(1pts+0,5pts)$ Sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ c'est à dire : $\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ c'est à dire : $\cos^2 x=1-\frac{1}{3}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{2}{3}$ par suite : $\cos x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

Par suite : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

Or $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc : $\cos x<0$ donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{6}}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice04 : $2pts(1pts+1pts)$ Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

2) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

Solution:1)On a: $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2+2\sin^2 x\cos^2 x+\left(\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=(1)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

2) $(1+\sin x+\cos x)^2=1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x$

$$\begin{aligned}&=1+1+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x\\&=2+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x\\&=2(1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x)\\&=2((1+\sin x)+\cos x(1+\sin x))\\&=2(1+\sin x)(1+\cos x)\end{aligned}$$

Exercice05 : $2pts(1pts+1pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x=-\frac{1}{2}$

2) En déduire les solutions dans $[0;2\pi]$ de l'équation $\sin x=-\frac{1}{2}$

Solution :1) $\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

2)

• Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

Équivaut à : $\frac{1}{12} \le k \le \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08 \le k \le 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$ Donc $0 \le \frac{7}{6} + 2k \le 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12} \le k \le \frac{5}{12}$

Donc $-0,5 \le k \le 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6} \right\}$

Exercice06 : $2pts(0,5pts \times 4)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$ b) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0$ c) $\sin(2x) = \cos(3x)$ d) $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -1$

Solution : a) On a : $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$ Équivaut à : $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Équivaut à : $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0$ Équivaut à : $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$ Équivaut à : $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - \left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) On a : $\sin(2x)=\cos(3x)$ équivaut à : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-1$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\frac{\pi}{3}+x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi$ cad $x=-\frac{7\pi}{12}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{7\pi}{12}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice07 : $(1pts)$ Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x\le-\frac{1}{2}$

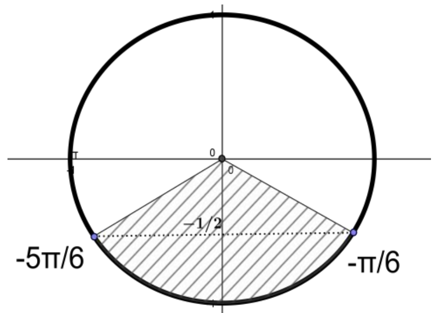
Solution : $\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in]-\pi;\pi]$ alors : $x=-\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$

$\sin x\le-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x\le-\sin\frac{\pi}{6}$



En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

On trouve que : $\sin x\le-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $x\in\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$ Donc $S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice08 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$ On pose : $E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$ avec $x\in\mathbb{R}$

1) Calculer : $E(0)$ et $E(\pi)$

2) Montrer que : $E(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $E(x)=-\sqrt{2}$

Solution :1) $E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

1) Calcul de : $E(0)$ et $E(\pi)$

$E(0)=\sin\left(2\times 0+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times 0+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$E(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$E(\pi)=\sin\left(2\times\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

Car $\sin(2\pi+x)=\sin x$ et $\cos(2\pi+x)=\cos x$

2) Démontrons que : $E(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$?

$E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$

Donc : $E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $E(x)=-\sqrt{2}$

$E(x)=-\sqrt{2}$ Équivaut à : $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ c à d : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ c'est à dire : $2x=\pi+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Par conséquent : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien