Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 : K sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $2\,pts(0,5\,pts \times 4)$ Dans chacun des cas suivants, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :

1) $A(-\pi)$ 2) $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 3) $C(10\pi)$ 4) $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Solution :1) π : 3π ; 5π et plus généralement $-\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) $-\frac{\pi}{2}$: $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$ et plus généralement $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3) 0 : 2π ; 4π et plus généralement $10\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

4) $\frac{7\pi}{4}$: $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$ et plus généralement $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice02 : $2\,pts(1,5\,pts + 0,5\,pts)$

On considère un réel x tel que : $\sin x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

1) Déterminer la valeur exacte de $\cos x$

2) On sait que : $x \in \left\{-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$ déterminer la valeur exacte de x

Solution :1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc $\cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{2 - 2\sqrt{12} + 6}{16}$

$$\cos^2 x = \frac{16 - \left(8 - 2\sqrt{12}\right)}{16} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16}$$ C'est-à-dire : $\cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Donc : $\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or comme : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x$ est positif et par suite : $\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) On a $\sin x < 0$ car : $\sqrt{2} \prec \sqrt{6}$ donc $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ et de plus $|\cos x| = \left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right| \succ |\sin x| = \left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right|$

Donc : $-\frac{\pi}{4} < x \leq 0$ et finalement : $x = -\frac{\pi}{12}$

Exercice03 : $3\,pts(1,5\,pts + 1,5\,pts)$ On pose : $A(x) = \sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$

1) Calculer : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Montrer que : si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ alors : $A\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = A\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Solution :1) $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$

$A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

2) Montrons que : si $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ alors : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$?

$A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$

$A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$

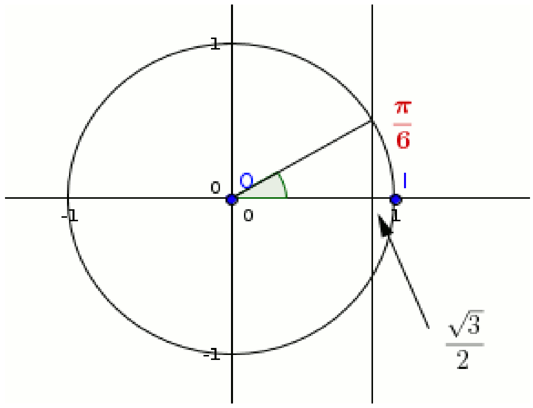
Donc : $A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$ Par suite : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Exercice04 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'équation : $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : Étape 1 : Utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de retrouver une valeur dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses

On peut dire que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ par exemple.



Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U=\cos V$ "

$\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}$

On applique alors la propriété

Donc on a : $2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{6}+2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité, j'obtiens : $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{12}+k'\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $k'\in\mathbb{Z}$

- Étape3 :Mais il ne va falloir garder que les valeurs de x dans l'intervalle imposé c'est à dire dans $]-\pi,\pi]$

on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs a k

Pour la première série de valeurs : $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons on obtient $x=\frac{\pi}{12}-2\pi$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus. Par contre, si je choisis $k=-1$:on obtient/ $x=\frac{\pi}{12}-\pi$; cette valeur appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de k telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k=-1$: $x_1=\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{11\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=0$: $x_2=\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Faisons de même pour la deuxième série de valeurs : $x=-\frac{\pi}{12}+k'\pi$ avec k' dans $\mathbb{Z}$

pour $k'=-1$: $x=-\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k'=0$: $x_3=-\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k'=1$: $x=-\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{11\pi}{12}$ convient pas car appartient à $\left]-\pi,\pi\right]$

pour $k'=2$: $x=-\frac{\pi}{12}+2\pi$ ne convient pas car n'appartient pas à $\left]-\pi,\pi\right]$

Donc : l'ensemble solution de l'équation dans $\left]-\pi,\pi\right]$ est donc: $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right\}$

Exercice05 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $\left[0;2\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\sin x\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$

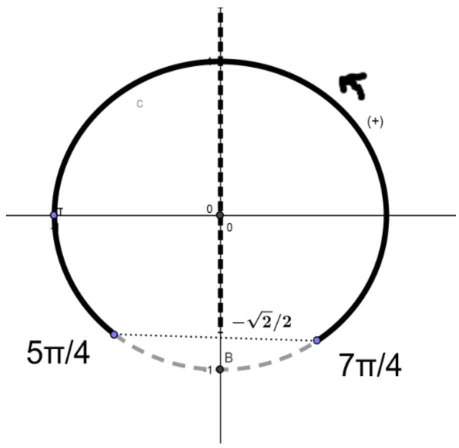
Solution : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in\left[0;2\pi\right]$ alors : $x=\frac{5\pi}{4}$ ou $x=\frac{7\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\left[0;2\pi\right]$



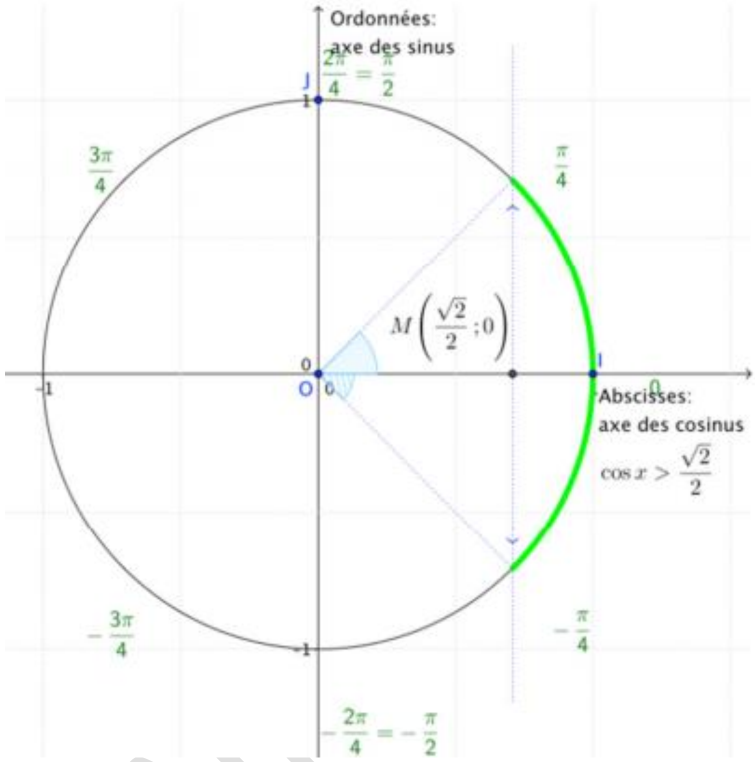
On trouve que : $\sin x\geq\frac{1}{2}$ Équivaut à :

$x\in\left[0;\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$ Donc : $S=\left[0;\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice06 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :

$S=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$



Exercice07 : $8,5pts(1,5pts+2pts+1,5pts+1pts+1pts+1,5pts)$

On pose : $F(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}$ avec $x\in[0;\pi]$

1) Calculer : $F(0)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

2) Montrer que : $F(\pi-x)=F(x)$ pour tout $x\in[0;\pi]$

3) En déduire : $F(\pi)$ et $F\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

4) Ecrire $F(x)$ en fonction $\tan x$ pour tout $x\neq\dfrac{\pi}{2}$

5) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation : $F(x)=\dfrac{4}{7}\quad(E)$

6) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $F(x)>\dfrac{4}{7}\quad(I)$

Solution :1) $F(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x+2\sin^2 x}$ avec $x\in[0;\pi]$

$$F(0)=\frac{1}{\cos^2 0+2\sin^2 0}=\frac{1}{1^2+2\times 0}=1$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sin^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}+2\sin^2\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

2) Montrons que : $F(\pi-x)=F(x)$ pour tout $x\in[0;\pi]$?

$$F(\pi - x) = \frac{1}{\cos^2(\pi - x) + 2\sin^2(\pi - x)} = \frac{1}{(-\cos x)^2 + 2\sin^2 x} = F(x)$$

$$F(\pi - x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = F(x)$$

3) Déduction de : $F(\pi)$ et $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$F(\pi) = F(\pi - \pi) = F(0) = 1$$

$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = F\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = F\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$

4) Ecriture de $F(x)$ en fonction $\tan x$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$:

$$F(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x\left(1 + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{1 + 2\tan^2 x} = \left(1 + \tan^2 x\right) \times \frac{1}{1 + 2\tan^2 x}$$

Car : $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ par suite : $F(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + 2\tan^2 x}$

5) Résolution dans $[0 ; \pi]$ de l'équation : $F(x) = 0$ (E)

$F(x) = \frac{4}{7}$ Équivaut à : $\frac{1 + \tan^2 x}{1 + 2\tan^2 x} = \frac{4}{7}$

Équivaut à : $7\left(1 + \tan^2 x\right) = 4\left(1 + 2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7 + 7\tan^2 x = 4 + 8\tan^2 x$ Équivaut à : $\tan^2 x = 3$

Équivaut à : $\tan x = \sqrt{3}$ ou $\tan x = -\sqrt{3}$ Équivaut à : $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

• Encadrement de $\frac{\pi}{3} + k\pi$: $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{1}{3} + k \leq 1$ équivaut à : $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$

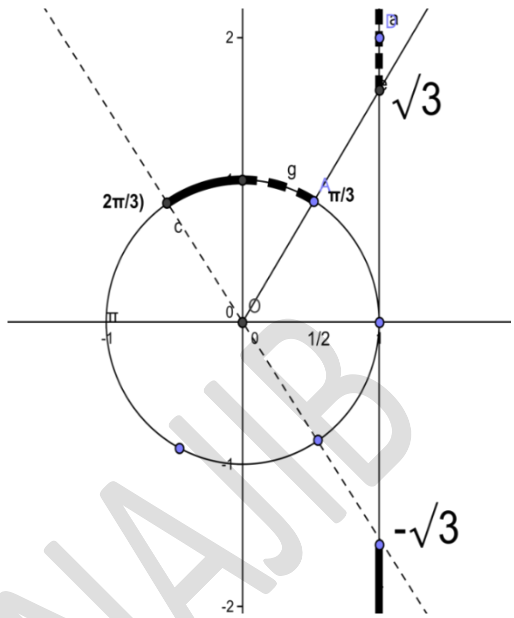
Donc $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{3}$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{3}+k\pi$: $0 \le -\frac{\pi}{3}+k\pi \le \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le -\frac{1}{3}+k \le 1$ équivaut à : $\frac{1}{3} \le k \le \frac{4}{3}$

Donc $k=1$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{2\pi}{3}$

Donc $S_{[0\,;\,\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$



6) Résolution dans $[0\,;\pi]$ de l'inéquation : $F(x) > \frac{4}{7}$ $\quad (I)$

$F(x) > \frac{4}{7}$ Équivaut à : $\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x} > \frac{4}{7}$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right) > 4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right) > 4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7+7\tan^2 x > 4+8\tan^2 x$ Équivaut à : $-\tan^2 x > -3$

Équivaut à : $\tan^2 x < 3$ Équivaut à : $\tan^2 x - \sqrt{3}^2 < 0$

Équivaut à : $\left(\tan x - \sqrt{3}\right)\left(\tan x + \sqrt{3}\right) < 0$

$\tan x - \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\tan x < \sqrt{3}$

$\tan x - \sqrt{3} > 0$ Équivaut à : $\tan x > \sqrt{3}$

$\tan x + \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\tan x < -\sqrt{3}$

Donc le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$tanx-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$		$-$	
$tanx+\sqrt{3}$		$+$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$produit$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

$S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien