Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 : L sur les leçons suivantes :

- ✓ TRIGONOMÉTRIE partie1
- ✓ TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice01 : $4\,pts(1\,pts \times 4)$

Calculer en fonction de : $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$A(x)=\sin(-x)-\cos(-x)$; $B(x)=\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)$

$C(x)=\sin(3\pi+x)+\cos(2\pi+x)$; $D(x)=\cos(\pi+x)+\sin(-x)+\sin(x-4\pi)$

Solution : 1) $A(x)=\sin(-x)-\cos(-x)$

$A(x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)$

$B(x)=\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)$

$B(x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x)$

$C(x)=\sin(3\pi+x)+\cos(2\pi+x)$

$C(x)=\sin(2\pi+\pi+x)+\cos x$

$C(x)=\sin(\pi+x)+\cos x=-\sin x+\cos x$

$D(x)=\cos(\pi+x)+\sin(-x)+\sin(x-4\pi)$

$D(x)=-\cos x-\sin x+\sin x$

$D(x)=-\cos x$

Exercice02 : $3\,pts(1\,pts \times 3)$

Calculer : $A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)$; $B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ et $C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$

Solution : Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$A=\cos\left(6\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=-\cos\frac{\pi}{4}+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}$

$C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)=\sin\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$C=\sin\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+1=-\sin\frac{\pi}{3}+1$

Donc : $C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

Exercice03 : $3,5pts(2pts+1,5pts)$

Soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; On pose : $A=\cos^2 x+3\cos x\sin x-2\sin^2 x$

1) Montrer que : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

2) Sachant que $\tan x=1+\sqrt{2}$ calculer : A

Solution : 1) Montrons que : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

On a : $A=\cos^2 x+3\cos x\sin x-2\sin^2 x$

Donc : $A=\cos^2 x\left(1+3\frac{\cos x\sin x}{\cos^2 x}-2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$ c'est-à-dire : $A=\cos^2 x\left(1+3\frac{\sin x}{\cos x}-2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right)$

Donc : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\left(\tan x\right)^2\right)$

Donc : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

2) Sachant que $\tan x=1+\sqrt{2}$ calculons : A

On a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ par suite : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$

C'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{1}{1+1+2\sqrt{2}+2}=\frac{1}{4+2\sqrt{2}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4-2\sqrt{2}}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

On a : $A=\cos^2 x\left(1+3\tan x-2\tan^2 x\right)$

Donc : $A=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+3\left(1+\sqrt{2}\right)-2\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right)$

Donc : $A=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(1+3+3\sqrt{2}-6-4\sqrt{2}\right)$

Donc : $A=-\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{4}\left(2^2-\sqrt{2}^2\right)=-\frac{1}{4}\left(4-2\right)=-\frac{1}{2}$

Exercice04 : $2,5pts(1,5pts+1pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) : $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

2) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $[0;\pi]$

Solution :1) On pose $t=\sin x$ et l'équation (E) devient : $2t^2-3t+1=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:

Calcul du discriminant :

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$

Les racines sont : $t_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{1}{2}$ et $t_2=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times 2}=1$

Donc : $\sin x=\frac{1}{2}$ et $\sin x=1$

$\sin x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$\sin x=1$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

a) Pour : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$: Prenons par exemple la valeur $k=-1$ et remplaçons on obtient :

$x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$; cette valeur n'appartient pas à $[0\,;\pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -1 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=0$: on obtient $x=\frac{\pi}{6}$; cette valeur appartient à $[0\,;\pi]$.

Pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi\notin[0\,;\pi]$

Il est inutile de poursuivre pour des valeurs supérieures à : 1

Donc : la seule valeur dans $[0\,;\pi]$ est : $x=\frac{\pi}{6}$

b) Pour : $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

La même démarche que précédemment donne : $x=\frac{5\pi}{6}$

Donc : la seule valeur dans $[0\,;\pi]$ est : $x=\frac{5\pi}{6}$

c) Pour : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$: La même démarche que précédemment donne : $x=\frac{\pi}{2}$

Donc : la seule valeur dans $[0\,;\pi]$ est : $x=\frac{\pi}{2}$

Conclusion : $S_{[0\,;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}$

Exercice05 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation suivante : $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

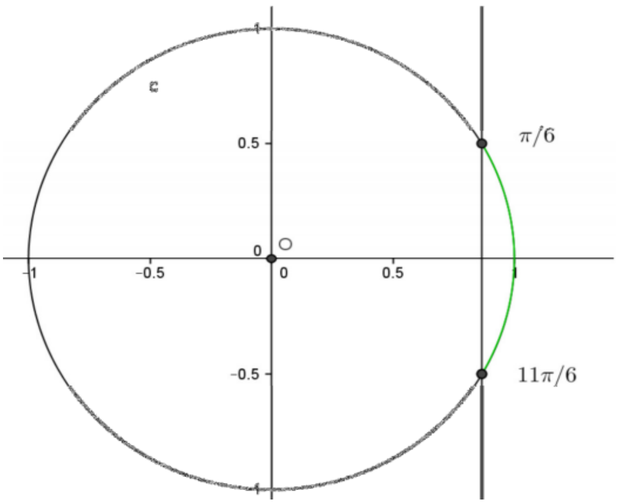
Solution : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi[$ alors : $x=\frac{11\pi}{6}$ et $x=\frac{\pi}{6}$

$\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x>\cos\frac{\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi[$



On trouve que : $S=\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

Exercice06 : $5,5\,pts(1,5\,pts+2\,pts+2\,pts)$ 1) a) Vérifier que : $5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

b) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation suivante : $4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{6}=0\ (E)$

2) Résoudre dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes : $2\cos x-\sqrt{2}>0$ et $2\cos x-\sqrt{3}<0$

3) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{6}\geq 0$

Solution :1) a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$

b) $4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{6}=0$

On utilise un changement de variable : on pose $t=\cos x$

L'équation devienne : $4t^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{6}=0$

On cherche les racines du trinôme $t^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{6}$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta'=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}$

$\Delta'=3+2\sqrt{6}+2-4\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

Les racines sont : $t_1=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $t_2=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Avec $k\in\mathbb{Z}$ et $x\in[0;2\pi]$

Après avoir encadré ces solutions on va trouver :

$x_1=\frac{\pi}{6}$ et $x_1=\frac{11\pi}{6}$

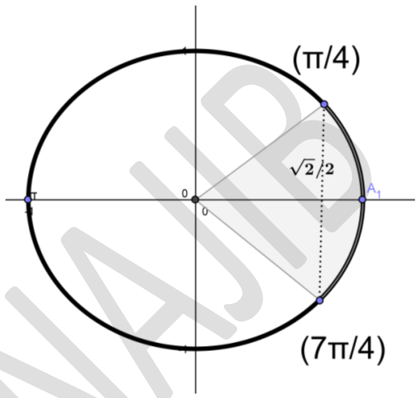
• $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Avec : $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0;2\pi]$

Après avoir encadré ces solutions on va trouver :

$x_2 = \frac{\pi}{4}$ et $x_4 = \frac{7\pi}{4}$

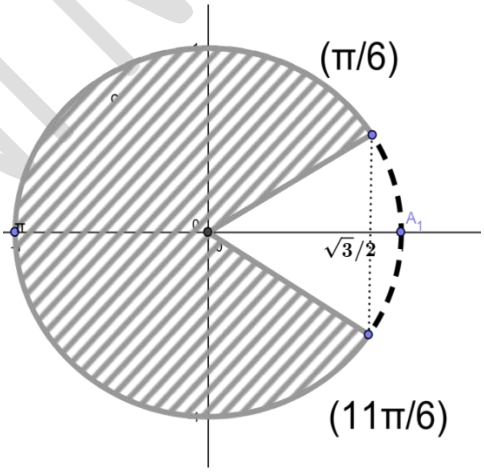
Finalement on a : $S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{4}\right\}$



2) a) Résolution dans $[0;2\pi]$ de l'inéquation : $2\cos x - \sqrt{2} > 0$

$2\cos x - \sqrt{2} > 0$ Équivaut à : $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $S = \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$



2) b) Résolution dans $[0;2\pi]$ de l'inéquation : $2\cos x - \sqrt{3} < 0$

$2\cos x - \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $S = \left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[$

3) Résolution dans $[0;2\pi]$de l'inéquation :

$4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} \geq 0$

$4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} \geq 0$ Équivaut à :

$4\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$

Équivaut à : $2\left(\cos x - \sqrt{3}\right)\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) < 0$

Et par suite le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$2cosx-\sqrt{2}$	$+$	$+$ | 0	$-$ | 0	$+$		$+$
$2cosx-\sqrt{3}$	$+$ | 0	$-$	$-$	$-$ | 0		$+$
$produit$	$+$ | 0	$-$ | 0	$+$ | 0	$-$ | 0		$+$

Donc $S = \left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien