Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 sur les leçons suivantes :

- ✓ TRIGONOMÉTRIE partie1
- ✓ TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice01 : $1,5pts(0,5pts\times3)$ Dans chacun des cas suivants
Déterminer si x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point.

1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=-\frac{3\pi}{2}$ 2) $x=-\frac{5\pi}{4}$ et $y=\frac{3\pi}{4}$ 3) $x=-\frac{5\pi}{12}$ et $y=\frac{43\pi}{12}$

Solution : x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point s'il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que :
$x-y=2k\pi$

1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=-\frac{3\pi}{2}$

$$x-y=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi=2\times1\times\pi$$

Donc : x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point.

2) $x=-\frac{5\pi}{4}$ et $y=\frac{3\pi}{4}$

$$x-y=-\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{8\pi}{4}=-2\pi=2\times(-1)\times\pi$$

Donc : x et y sont des abscisses curvilignes d'un même point.

3) $x=-\frac{5\pi}{3}$ et $y=\frac{8\pi}{3}$

$$x-y=-\frac{5\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}=-\frac{13\pi}{3}\neq2\times k\times\pi$$

Donc : x et y ne sont pas des abscisses curvilignes d'un même point.

Exercice02 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A=\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)+\cos(\pi)$$

$$B=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

Solution : $A=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$

$$B=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On a : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\tan\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $B=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice03 : $3pts(0,5pts+0,5pts+1pts+1pts)$
Exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les réels suivants :
$A=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)$; $B=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)$; $C=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin(\pi+x)$
$D=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(-x-\pi)+5\sin(-x)$

Solution : $A=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)=\cos(1010\pi+x)=\cos(2\times505\pi+x)=\cos x$

$B=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{2020\pi+\pi}{2}+x\right)=\sin\left(1010\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$C=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin(\pi+x)$

$C=\sin x+4\sin\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)-5\times(-\sin x)$

$C=\sin x-4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+5\sin x=6\sin x-4\cos x$

$D=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(-x-\pi)+5\sin(-x)$

$D=\cos x+2\cos x-5\sin x=3\cos x-5\sin x$

Exercice04 : $2,5pts(1pts+1,5pts)$ On donne : $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1)Calculer la valeur exacte de : $\sin\frac{\pi}{5}$

2) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus des réels: $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$

Solution : 1) On a **:** $\cos^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}=1$

Donc **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\cos^2\frac{\pi}{5}$ c'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}$

C'est à dire **:** $\sin^2\frac{\pi}{5}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sin\frac{\pi}{5}=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ or $\frac{\pi}{5}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\sin\frac{\pi}{5}>0$

La seule solution possible est : $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) On a : $\frac{4\pi}{5}=\frac{5\pi-\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

Donc : $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

On a : $\frac{9\pi}{5}=\frac{4\pi+5\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}+\frac{5\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}+\pi$

Donc : $\sin\frac{9\pi}{5}=\sin\left(\frac{4\pi}{5}+\pi\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Exercice05 : $2,5pts(1pts+0,5pts+1pts)$

ABC un triangle tel que : $BC=\sqrt{3}$ et $BCA=\frac{\pi}{4}$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

1) Calculer : AB

2) a) Vérifier que : $ABC=\frac{5\pi}{12}$

b) Calculer : $\sin\frac{5\pi}{12}$ sachant que : $AC=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et en déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$

Solution : Nous connaissons la valeur de deux angles et d'un côté du triangle :

$BCA=\frac{\pi}{4}$ et côté $BC=\sqrt{3}$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

Il s'agit donc d'application de la loi des sinus.

La loi des sinus nous permet d'établir la relation suivante : $\frac{\sin BAC}{BC}=\frac{\sin BCA}{AB}$

Isolons-le côté AB : $AB=\frac{BC\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$

2) a) Vérifions que : $ABC=\frac{5\pi}{12}$

Comme nous connaissons la valeur de deux des angles du triangle, il est possible de trouver la valeur du troisième : On a $A+B+C=\pi$ donc : $B=\pi-(A+C)$

Donc : $B=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $B=\pi-\frac{7\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

b) Calcul de : $\sin\frac{5\pi}{12}$

D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a : $\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin A}{BC}$ c'est-à-dire : $\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{AC}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{BC}$

Donc : $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Déduction de la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$: On a $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice06 : $(1,5pts)$ Résoudre dans $[0,4\pi]$ l'équation suivantes : $2\cos 2x-1=0$

Solution : $2\cos 2x-1=0$ Équivaut à : $2\cos 2x=1$

Équivaut à : $\cos 2x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$

Résolution dans $[0,4\pi]$ de l'équation (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$: $0\le\frac{\pi}{6}+k\pi\le4\pi$ Équivaut à : $0\le\frac{1}{6}+k\le4$ car $\pi>0$

Équivaut à : $-\frac{1}{6}\le k\le\frac{23}{6}$ C'est-à-dire : $-0{,}166...\le k\le3{,}833...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$ ou $k=3$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\frac{\pi}{6}+0\times\pi=\frac{\pi}{6}$

Pour $k=1$ on remplace on trouve $x_2=\frac{\pi}{6}+1\times\pi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$

Pour $k=2$ on remplace on trouve $x_3=\frac{\pi}{6}+2\times\pi=\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$

Pour $k=3$ on remplace on trouve $x_4=\frac{\pi}{6}+3\times\pi=\frac{\pi}{6}+3\pi=\frac{19\pi}{6}$

b) Encadrement de : $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$: $0\le-\frac{\pi}{6}+k\pi\le4\pi$ Équivaut à : $0\le-\frac{1}{6}+k\le4$ car $\pi>0$

Équivaut à : $\frac{1}{6}\le k\le\frac{25}{6}$ C'est-à-dire : $-0{,}166...\le k\le3{,}833...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=1$ ou $k=2$ ou $k=3$ ou $k=4$

Pour $k=1$ on remplace on trouve $x_5=-\frac{\pi}{6}+1\times\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$

Pour $k=2$ on remplace on trouve $x_6=-\frac{\pi}{6}+2\times\pi=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$

Pour $k=3$ on remplace on trouve $x_7=-\frac{\pi}{6}+3\times\pi=-\frac{\pi}{6}+3\pi=\frac{17\pi}{6}$

Pour $k=4$ on remplace on trouve $x_8=-\frac{\pi}{6}+4\times\pi=-\frac{\pi}{6}+4\pi=\frac{23\pi}{6}$

Donc $S_{[0,4\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{13\pi}{6};\frac{17\pi}{6};\frac{19\pi}{6};\frac{23\pi}{6}\right\}$

Exercice07 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation suivante : $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation suivante : $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

Solution :1) on a : $\cos2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à : $2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $2x-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ équivaut à : $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

Équivaut à : $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$

Équivaut à : $3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Donc $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$: $0\leq\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\leq\frac{7}{36}+\frac{2k}{3}\leq1$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{24}\leq k\leq\frac{29}{36}$ cela signifie que : $-0,29\leq k\leq1,2$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve : $x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de : $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$ $0\leq\frac{13\pi}{12}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $0\leq\frac{13}{12}+2k\leq1$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{24}\leq k\leq-\frac{1}{24}$

Cela signifie que : $-0,54\leq k\leq0,04$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0.\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ est définie Équivaut à : $2x-\frac{\pi}{5}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ Équivaut à : $2x\neq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

Équivaut à : $2x\neq\frac{7\pi}{10}+k\pi$ cela signifie que : $x\neq\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$ Donc $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

Or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Donc $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ équivaut à : $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ équivaut à : $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$: $-\frac{\pi}{2}\leq\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc $-\frac{1}{2}\leq\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\leq\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $-\frac{29}{40}\leq\frac{k}{2}\leq\frac{11}{40}$ Donc : $-\frac{29}{40}\leq\frac{k}{2}\leq\frac{11}{40}$ alors : $-\frac{29}{20}\leq k\leq\frac{11}{20}$

Donc $-1,45\leq k\leq0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$ par suite : $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve : $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$ Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

Exercice08 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ (E_1)

Solution :1) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ (E_1)

On utilise un changement de variable : on pose $t=\sin x$

PROF: ATMANI NAJIB

L'équation (E_2) devienne : $2t^2 - 3t + 1 = 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 3t + 1$:

Calcul du discriminant réduit : $\Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times 1 = 1$

Les racines sont : $t_1 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ et $t_2 = \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ donc : $\sin x = 1$ et $\sin x = \dfrac{1}{2}$

Donc : : $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

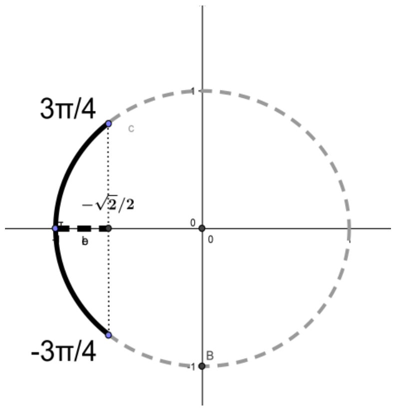
Exercice09 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4}$

$\cos x \le \dfrac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \le \cos\dfrac{\pi}{3}$



En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Dans : $]-\pi;\pi]$

On trouve que : $S = \left]-\pi; -\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB