Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 : N sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $(1,5\,pts)$ Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I

Les points d'abscisses curvilignes : $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution :1) Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)$

$\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi<\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\leq\pi$

Équivalent à : $-1<\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\leq 1$

Équivalent à : $-1-\frac{1}{6}<\frac{k}{3}\leq 1-\frac{1}{6}$

Équivalent à : $-\frac{7}{6}<\frac{k}{3}\leq\frac{5}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{2}<k\leq\frac{5}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Par suite : $k=-3$ ou $k=-2$ ou $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$ ou $k=2$

Donc : le nombre de points est 6 :

Si $k=0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{6}+\frac{0\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$

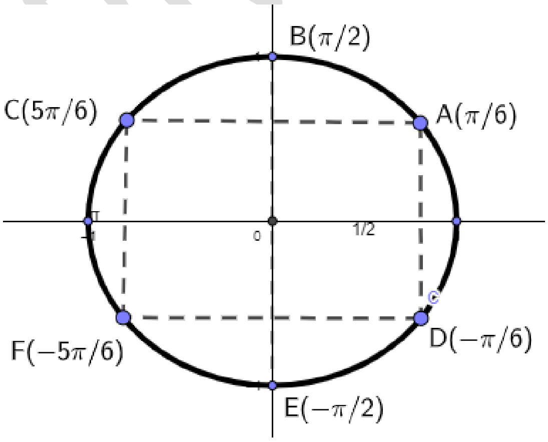
Si $k=1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Si $k=2$ alors : $C\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Si $k=-1$ alors : $D\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $D\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Si $k=-2$ alors : $E\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $E\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Si $k=-3$ alors : $F\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3\times\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$



Exercice02 : $1,5\,pts(0,5\,pts\ \times 3)$ On pose : $A(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

Calculer : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Solution : Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}\quad A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Exercice03 : $3\,pts(1\,pts\ \times 3)$ Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A=\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)+\cos(\pi)$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{9\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Solution : Pour mémoire :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$$A=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

Donc : $B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0=2+\sqrt{3}$

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$$

On remarque que : $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ donc : $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$ Et on a : $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

et $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

Donc on a : $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Et on remarque que : $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

$C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$

Exercice04 : $3pts(1,5pts\times2)$ simplifier les expressions suivantes :

$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$ $\qquad B=\sin^4x-\cos^4x+2\cos^2x$

$C=\sin^6x+\cos^6x+\cos^4x+\sin^4x+5\cos^2x\sin^2x$

Solution : $A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

$A=\cos^2x+2\cos x\sin x+\sin^2x+\cos^2x-2\cos x\sin x+\sin^2x$ $A=2\cos^2x+2\sin^2x=2(\cos^2x+\sin^2x)=2\times1=2$

$B=\sin^4x-\cos^4x+2\cos^2x=(\sin^2x)^2-(\cos^2x)^2+2\cos^2x$ $C=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)+2\cos^2x=\sin^2x-\cos^2x+2\cos^2x$

Donc : $B=\sin^2x+\cos^2x=1$

$C=\sin^6x+\cos^6x+\cos^4x+\sin^4x+5\cos^2x\sin^2x$

$C=(\sin^2x)^3+(\cos^2x)^3+\cos^4x+\sin^4x+5\cos^2x\sin^2x$ $C=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)+$

$+\cos^4x+\sin^4x+5\cos^2x\sin^2x$

$C=\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x+\cos^4x+\sin^4x+5\cos^2x\sin^2x$

$C=2\sin^4x+4\sin^2x\cos^2x+2\cos^4x$

$C=2(\sin^2x+\cos^2x)^2=2\times1=2$

Exercice05 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$: Soit $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$; On pose : $A=\sin^2x+2\cos^2x-1$

1) Montrer que : $A=\cos^2x$

2) Si $A=\frac{1}{3}$ calculer : $\tan x$

Solution : 1) Montrons que : $A=\cos^2x$

On a : $A=\sin^2x+2\cos^2x-1$ et on sait que : $\sin^2x+\cos^2x=1$ c'est-à-dire : $\sin^2x=1-\cos^2x$

Donc : $A=1-\cos^2x+2\cos^2x-1$

Donc : $A=1+\cos^2x-1=\cos^2x$

2) Si $A=\frac{1}{3}$ calculons : $\tan x$

On a : $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ par suite : $\cos^2x=\frac{1}{1+\tan^2x}$

Donc : $A=\frac{1}{1+\tan^2x}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{3}=\frac{1}{1+\tan^2x}$

Donc : $1+\tan^2x=3$ c'est-à-dire : $\tan^2x=2$

Donc : $\tan x=\sqrt{2}$ ou $\tan x=-\sqrt{2}$ mais on a : $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ c'est-à-dire : $\tan x\leq 0$

Par suite : $\tan x=-\sqrt{2}$

Exercice06 : $3,5pts(2,5pts\ +1pts)$ Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi\,;6\pi]$

2) $\sin(3x)=\cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

Solution : 1) on va résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi\,;6\pi]$: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$ Équivaut à : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(-x)$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{4}=-x+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4}=\pi-(-x)+2k\pi$

Équivaut à : $3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ c'est-à-dire : $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3};\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$:

$4\pi\leq-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\leq 6\pi$ Équivaut à : $\frac{49\pi}{12}\leq\frac{2k\pi}{3}\leq\frac{73\pi}{12}$ $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $\frac{49}{8}\leq k\leq\frac{73}{8}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{7;8;9\}$ ce qui donne : $x_1=\frac{55\pi}{12}$; $x_2=\frac{63\pi}{12}$; $x_3=\frac{71\pi}{12}$

- Encadrement de $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$:

$4\pi\leq\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq 6\pi$ Équivaut à : $\frac{13\pi}{4}\leq 2k\pi\leq\frac{21\pi}{4}$ $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $\frac{13}{8}\leq k\leq\frac{21}{8}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=2$ ce qui donne : $x_4=\frac{19\pi}{4}$

Finalement : $S_{[4\pi\,;6\pi]}=\left\{\frac{55\pi}{12};\frac{63\pi}{12};\frac{71\pi}{12};\frac{19\pi}{4}\right\}$

2) $\sin(3x)=\cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

$\sin(3x)=\cos(2x)$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos(2x)$

Équivaut à : $\frac{\pi}{2}-3x=2x+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}-3x=-2x+2k\pi$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ c'est-à-dire : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2}$ ou $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice07 : $(2\,pts)$ Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x > -1$

Solution :

- L'inéquation $\tan x > -1$ est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$

- Résolution de l'équation : $\tan x = -1$

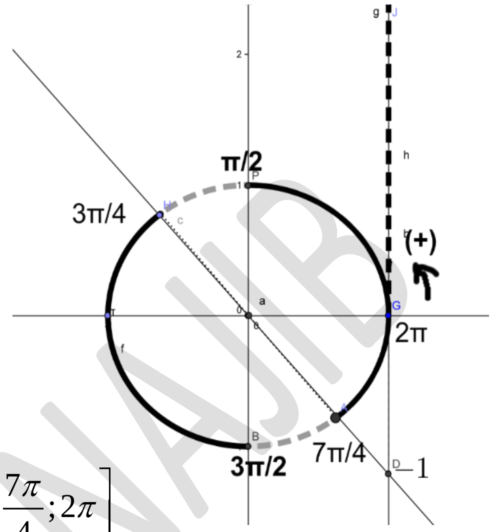
$\tan x = -1$ Équivaut à : $\tan x = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique

On compare $\tan x$ et -1 dans $[0;2\pi]$



On trouve que : $\tan x > -1$ Équivaut à : $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice08 : $(2{,}5\,pts)$ Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$

Solution :

1iér étape : On pose : $X = 2x$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi \leq 2x \leq \pi$

Équivaut à : $-\pi \leq X \leq \pi$

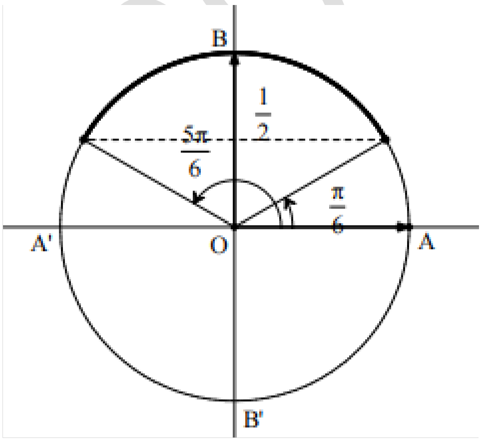
$\sin X = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin X = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $X = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $X = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $X = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $-\pi \leq X \leq \pi$ alors : $X = \frac{\pi}{6}$ ou $X = \frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin X$ et $\frac{1}{2}$ dans $-\pi \leq X \leq \pi$



$\begin{cases} \sin X \geq \frac{1}{2} \\ -\pi \leq X \leq \pi \end{cases}$ Équivaut à : $X \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

On trouve que : $\sin X \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $X \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

2iér étape : Or : $X = 2x$

$X \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ Équivaut à : $\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6}$ Équivaut à : $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$

Donc : $S = \left[\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien