Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 :O sur les leçons suivantes :

- ✓ TRIGONOMÉTRIE partie1
- ✓ TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques

Exercice01 : $(1,5\,pts)$ Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I les points d'abscisses curvilignes x qui vérifie : $2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution : $2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ signifie que : $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$

Pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)$

$\frac{\pi}{8}+k\pi\in\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi<\frac{\pi}{8}+k\pi\leq\pi$

Équivalent à : $-1<\frac{1}{8}+k\leq 1$

Équivalent à : $-1-\frac{1}{8}<k\leq 1-\frac{1}{8}$

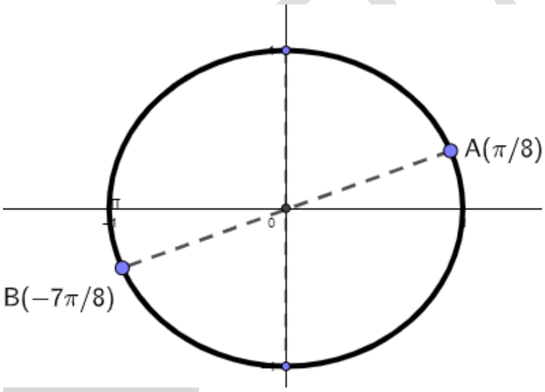
Équivalent à : $-\frac{9}{8}<k\leq\frac{7}{8}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Par suite : $k=-1$ ou $k=0$

Donc : il y a deux ponts :

Si $k=0$ alors : $A\left(\frac{\pi}{8}+0\times\pi\right)$ c'est-à-dire : $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Si $k=-1$ alors : $B\left(\frac{\pi}{8}-1\times\pi\right)$ c'est-à-dire : $B\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$



Exercice02 : $1,5\,pts(0,5\,pts\times 3)$ Dans chacun des cas suivants, déterminer si x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=\frac{3\pi}{2}$ 2) $x=\frac{5\pi}{3}$ et $y=-\frac{21\pi}{4}$ 3) $x=\frac{43\pi}{12}$ et $y=-\frac{5\pi}{12}$

Solution : 1) $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=\frac{3\pi}{2}$: $x-y=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}=-\pi$

Donc : x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

2) $x=\frac{5\pi}{3}$ et $y=-\frac{21\pi}{4}$: $x-y=\frac{5\pi}{3}+\frac{21\pi}{4}=\frac{83\pi}{12}$

Donc : x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

3) $x=\frac{43\pi}{12}$ et $y=-\frac{5\pi}{12}$: $x-y=\frac{43\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{48\pi}{12}=4\pi$

Donc : x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

Exercice03 : $4,5pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts)$ Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\cos(\pi)$$

$$B=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)$$

$$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Solution : $A=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\cos(\pi)$

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos(\pi)$$

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos(\pi)$$

$$A=0-1=-1$$

Calcul de B : $B=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)$

On a $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\pi-\frac{11\pi}{30}\right)$ et $\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{60}\right)$ et $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{60}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)$ et $\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)$ et $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)$

Donc : $B=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=0$

$$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$$

$$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

Exercice04: $2,5pts(1pts+2pts)$

ABC un triangle tel que : $BC=\sqrt{2}$ et $AC=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $BAC=\frac{3\pi}{4}$

1) Vérifier que : $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Calculer : $\sin ABC$ et en déduire la valeur de $\cos ABC$

Solution :1) Vérifions que $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$: On a : $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a : $\frac{\sin ABC}{AC}=\frac{\sin BAC}{BC}$

C'est-à-dire : $\frac{\sin ABC}{AC}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{BC}$

Donc : $\sin ABC=\frac{AC\times\sin BAC}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

Et on a : $\cos^2 ABC+\sin^2 ABC=1$ donc :

$\cos^2 ABC=1-\sin^2 ABC=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=1-\frac{2}{36}=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$

Donc : $\cos ABC=\sqrt{\frac{17}{18}}$ ou $\cos ABC=-\sqrt{\frac{17}{18}}$

Mais puisque l'angle ABC est aigu

Alors : $\cos ABC=\sqrt{\frac{17}{18}}$ (Angle aigu est un angle inférieur à l'angle droit,)

Exercice05 : $1,5pts(1pts+0,5pts)$

Sachant que : $\cos x=-\frac{3}{4}$ et $-\pi<x<0$; calculer : $\sin x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\cos x=-\frac{3}{4}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$ c'est à dire : $\sin^2 x=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

Donc : $\sin^2 x=\frac{7}{16}$ par suite : $\sin x=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\sin x=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

Or $-\pi<x<0$ donc : $\sin x<0$ donc : $\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ et par suite : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

Exercice06 : $2pts(1pts+1pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$: $-\pi<\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$ Équivaut à : $-\pi-\frac{\pi}{6}<2k\pi\leq\pi-\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{6}<2k\pi\leq\frac{5\pi}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{6}<2k\leq\frac{5}{6}$ Équivaut à : $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

C'est-à-dire : $-0,5...\leq k\leq 0,4...$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\frac{\pi}{6}+2\times0\times\pi=\frac{\pi}{6}$

b) Encadrement de $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$

Donc : $-1<-\frac{1}{6}+2k\leq1$ c'est-à-dire : $-1+\frac{1}{6}<2k\leq1+\frac{1}{6}$

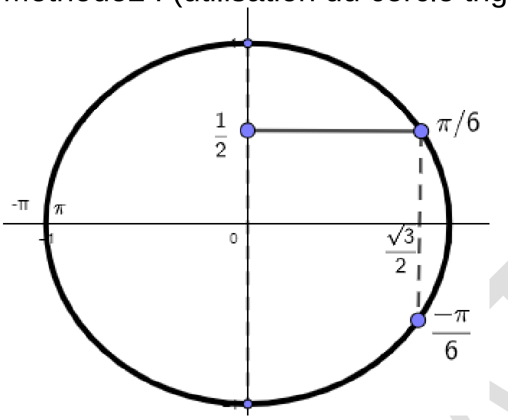
Donc : $-\frac{5}{6}<2k\leq\frac{7}{6}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{12}<k\leq\frac{7}{12}$

Donc $-0,...\leq k\leq 0,...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on remplace on trouve : $x_2=-\frac{\pi}{6}+2\times0\times\pi=-\frac{\pi}{6}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc : $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice07 : $3,5pts(2pts+1,5pts)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ 2) $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solution : 1) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin^2 x-\frac{1}{2}=0$

Équivaut à : $\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

Équivaut à : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire : $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ ou $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\} avec\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $\tan x = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc : les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice08: $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

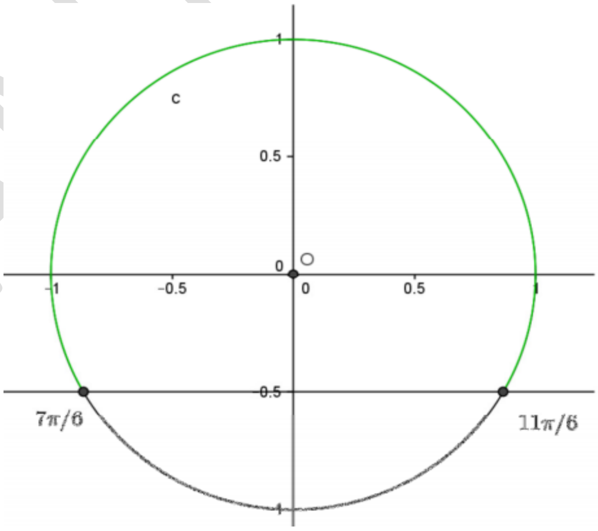
Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$

Alors : $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi]$



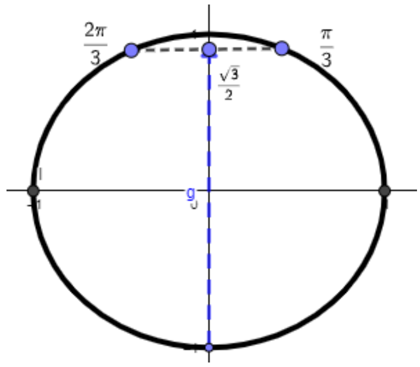
On trouve que :

$\sin x > -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[0;\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

Donc : $S = \left[0;\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

Exercice09 : $(1,5\,pts)$ Résoudre dans $[0\,;\pi]$

l'inéquation suivante : (I) : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$



Solution : Soit : $x \in [0\,;\pi]$ donc : $2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Signifie que : $-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$

Signifie que : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

Donc : $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien