Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 :P sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$

1) Déterminer l'abscisse curviligne principale associée au point : $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points : $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Solution : 1) $x=\frac{2007\pi}{4}$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve $501,75$ on prend le nombre entier proche ex : 502

Donc : $\frac{2007\pi}{4}-502\pi=\frac{2007\pi}{4}-\frac{2008\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

$\frac{2007\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+502\pi=-\frac{\pi}{4}+2\times 251\pi$ et $-\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

Methode2 : Soit α l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2007\pi}{4}$

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2k\pi$ et $\alpha\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{2007\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-1<\frac{2007}{4}+2k\leq 1$

Équivalent à : $-1-\frac{2007}{4}<2k\leq 1-\frac{2007}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire :

$-\frac{2011}{8}<k\leq\frac{2003}{8}$ et $k\in\mathbb{Z}$

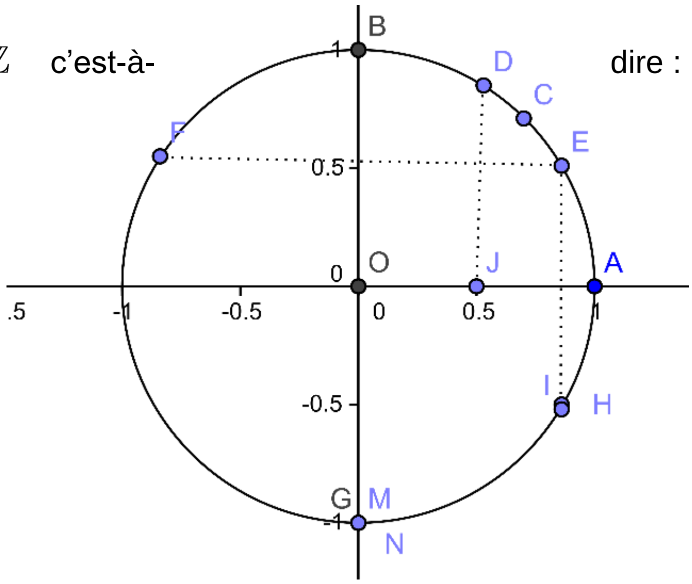
Donc $-251,3\simeq-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}\simeq-250,3$

Donc $k=-251$ par suite :

$\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à :

$x=\frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{4}$



Exercice02 : $(1,5\,pts)$ Sachant que. $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)\equiv-\frac{\pi}{7}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer la mesure principale de : $\left(\vec{v};\vec{w}\right)$; $\left(-\vec{u};\vec{v}\right)$ et $\left(-\vec{w};\vec{v}\right)$

Solution : $\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)\equiv\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right)[2\pi]$

$$\equiv-\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right)[2\pi]$$

$$\equiv-\left(-\frac{\pi}{7}\right)-\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Donc : $\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)\equiv-\frac{3\pi}{28}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{v}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi-\frac{\pi}{7}[2\pi]$ Donc : $\left(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{v}\right)\equiv\frac{6\pi}{7}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{-w};\overrightarrow{v}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi-\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)[2\pi]$ $\equiv\pi+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{-w};\overrightarrow{v}\right)\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice03 : $3pts(0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+1pts)$ Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$ $\qquad B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$ $\qquad E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

Solution : On a donc : $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2x+\cos^2x=1$$

$$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$$

$$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$$

$$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$$

$$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$$

$$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$$

$$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$$

$$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$$

Exercice04 : $2,5pts(1,5pts+1pts)$; On a : $\sin x=-\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a **:** $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$ c'est à dire **:** $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$

C'est à dire **:** $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ ou $\cos x=-\frac{3}{5}$ or $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos x\geq 0$ et par suite : $\cos x=\frac{3}{5}$

Et on a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}$

Exercice05 : $2pts(1pts+1pts)$ Ecrire seulement en fonction de $\tan x$ les expressions suivantes :

1) $A=\frac{\sin^2 x+3\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$ 2) $B=\cos^2 x-\sin x\cos x$

Solution : 1) $A=\frac{\sin^2 x+3\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

$A=\frac{\tan^2 x\times\cos^2 x+3\tan x\times\cos x\cos x}{\tan^2 x\times\cos^2 x-\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x\left(\tan^2 x+3\tan x\right)}{\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)}$ et par suite : $A=\frac{\tan^2 x+3\tan x}{\tan^2 x-1}$

2) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$ donc : $B=\cos^2 x-\tan x\times\cos x\cos x$

Donc : $B=\cos^2 x(1-\tan x)$ or $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $B=\frac{1}{1+\tan^2 x}(1-\tan x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$

Exercice06 : $2pts(1pts+1pts)$

1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{4\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ Équivaut à : $-\pi+\frac{\pi}{3}<2k\pi\le\pi+\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $-\frac{2\pi}{3}<2k\pi\le\frac{4\pi}{3}$ Équivaut à : $-\frac{2}{3}<2k\le\frac{4}{3}$ Équivaut à : $-\frac{1}{3}\le k\le\frac{2}{3}$

C'est-à-dire : $-0,3...\le k\le 0,6...$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=-\frac{\pi}{3}+2\times 0\times\pi=-\frac{\pi}{3}$

b) Encadrement de $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$: $-\pi<\frac{4\pi}{3}+2k\pi\le\pi$

Donc : $-1<\frac{4}{3}+2k\le 1$ c'est-à-dire : $-1-\frac{4}{3}<2k\le 1-\frac{4}{3}$

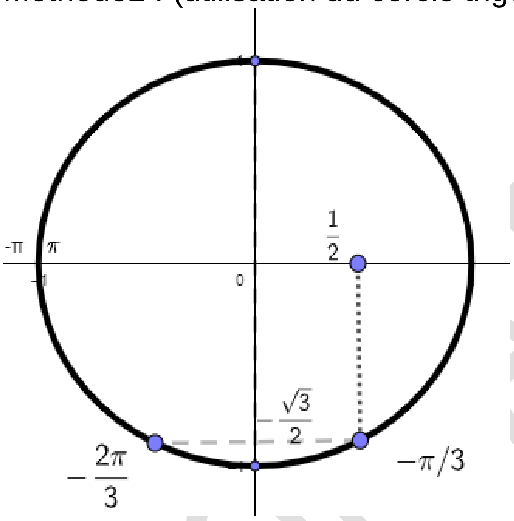
Donc : $-\frac{7}{3}<2k\le-\frac{1}{3}$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{6}<k\le-\frac{1}{6}$

Donc $-1,16...\le k\le-0,16...$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=-1$ on remplace on trouve : $x_2=\frac{4\pi}{3}+2\times(-1)\times\pi=\frac{4\pi}{3}-2\pi=\frac{-2\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice07 : $2pts(1pts+1pts)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\tan x=1$

2) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation suivante : $\tan x=1$

Solution :1) On a : $\tan x=1$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec ; $k\in\mathbb{Z}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{4}=1$ signifie que : $\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ si et seulement si : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\tan x=1$

$\tan x=1$ Signifie que : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k

Prenons par exemple la valeur $k=-2$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=-1$: on obtient $x=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$; cette valeur appartient à $]-\pi,\pi]$.

En appliquant cette démarche de manière systématique :

pour $k=-1$: $x_1=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k=0$: $x_2=\frac{\pi}{4}$ convient car appartient à $]-\pi,\pi]$

pour $k=1$: $x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi,\pi]$

Il est inutile de poursuivre (car si pour $k=1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Donc : les seules valeurs dans $]-\pi\,;\pi]$ sont : $x_1=-\frac{3\pi}{4}$ et $x_2=\frac{\pi}{4}$

Par suite : $S=\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice08 : $3pts(1,5pts\ +1pts+0,5pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin^2 x=1$ 2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2x=0$ 3) $\sqrt{2}\cos x+2=0$

Solution :1) Règles : Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.

$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

On effectue la racine carrée de chaque côté de l'égalité et on obtient : $\sin x=1$ ou $\sin x=-1$

En regardant dans le cercle trigonométrique, on trouve que :

$\sin x=1$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\sin x=-1$ Équivaut à : $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

Donc L'ensemble solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\} avec\ k\in\mathbb{Z}$

2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2x=0$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin 2x$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sin(-2x)$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2x=0$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$

Équivaut à : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$

Équivaut à : $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2x+2k\pi$ $\quad ou \quad$ $\frac{x}{2}=-\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $-\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\quad ou \quad$ $\frac{5x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{3}-\frac{4k\pi}{3}$ $\quad ou \quad$ $x=-\frac{\pi}{5}-\frac{4k\pi}{5}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3};-\frac{\pi}{5}+\frac{4k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $\sqrt{2}\cos x+2=0$ Équivaut à : $\sqrt{2}\cos x=-2$

Équivaut à : $\cos x=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\notin[-1;1]$

Alors l'équation : $\sqrt{2}\cos x+2=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

Exercice09 : $1pts(0,5pts\ +0,5pts)$ Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes : 1) $\cos x\leq 0$ 2) $\sin x\geq 0$

Solution : On utilise le cercle trigonométrique :

1) $S=\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ 2) $S=[0;\pi]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien