Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°4 :Q sur les leçons suivantes :

- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie1**
- ✓ **TRIGONOMÉTRIE partie2 : Equations et inéquations trigonométriques**

Exercice01 : $3pts(0,5pts+0,5pts+1pts+1pts)$ Exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les réels suivants :

$A=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)$ $\quad$ $B=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)$

$C=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin(\pi+x)$

$D=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(-x-\pi)+5\sin(-x)$

Solution : $A=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)=\cos(1010\pi+x)=\cos(2\times505\pi+x)=\cos x$

$B=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{2020\pi+\pi}{2}+x\right)=\sin\left(1010\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$C=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin(\pi+x)$

$C=\sin x+4\sin\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)-5\times(-\sin x)$

$C=\sin x-4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+5\sin x=6\sin x-4\cos x$

$D=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(-x-\pi)+5\sin(-x)$

$D=\cos x+2\cos x-5\sin x=3\cos x-5\sin x$

Exercice02 : $(1pts)$ Déterminer $\cos x$ sachant que $x\in\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$ et $\sin x=-\frac{2}{3}$

Solution : On a $\sin x=-\frac{2}{3}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ donc $\cos^2 x=1-\frac{4}{9}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{5}{9}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Or $x\in\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$ donc : $\cos x\geq0$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Exercice03 : $2,5pts(1pts+1,5pts)$ Simplifier les expressions suivantes :

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$H=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

Solution : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

On a $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

Et on a $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

Et on a $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

Donc : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

Donc : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

$H=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

Et on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $H=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $H=\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)+\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)$

Donc : $H=1+1=2$

Exercice04 : $4\,pts(1\,pts\times 4)$ Simplifier les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

$I=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}$ si $x\neq\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$J=\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}+\frac{2}{\sin x+\cos x+1}$ si $x\neq\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$K=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x$

$X=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$

Solution : $I=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\sin x(1-\sin x)+\cos x(1-\cos x)+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$

$$I=\frac{\sin x-\sin^2 x+\cos x-\cos^2 x+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$
$$I=\frac{-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+1+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$
$$I=\frac{-1+1+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}=\frac{\sin x\cos x}{\cos x\sin x}=1$$
$$J=\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}+\frac{2}{\sin x+\cos x+1}=\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)(\sin x+\cos x+1)+2\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}$$
Et après développement et Réduction on trouve : $J=1$
$$K=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x$$
$$K=\left(\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^2 x\right)^2+2\sin^2 x$$
$$K=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2\sin^2 x$$
$$K=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin^2 x$$
$$K=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$X=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$X=\left(\cos^2 x\right)^3+\left(\sin^2 x\right)^3+3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$
Et puisque : $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

Alors : $X=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3=1$

Exercice05 : $1,5pts(1pts+0,5pts)$ 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) En déduire les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation : $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution :1) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc : $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation

Méthode1 : (l'encadrement)

a) Encadrement de : $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ Équivaut à : $-\pi-\frac{3\pi}{4}<2k\pi\leq\pi-\frac{3\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{7\pi}{4}<2k\pi\leq\frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{7}{4}\leq 2k\leq\frac{1}{4}$ Équivaut à : $-\frac{7}{8}\leq k\leq\frac{1}{8}$

C'est-à-dire : $-0,...\leq k\leq 0,...$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve $x_1=\frac{3\pi}{4}+2\times 0\times\pi=\frac{3\pi}{4}$

b) Encadrement de $x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$: $-\pi<-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$

Donc : $-1<-\frac{3}{4}+2k\leq 1$ c'est-à-dire : $-1+\frac{3}{4}<2k\leq 1+\frac{3}{4}$

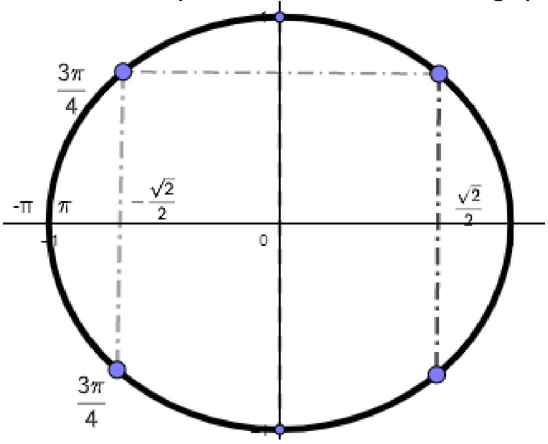
Donc : $-\frac{1}{4} < 2k \leq \frac{7}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{8} < k \leq \frac{7}{8}$

Donc $-0,... \leq k \leq 0,...$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2 \times 0 \times \pi = -\frac{3\pi}{4}$

Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Méthode2 : (utilisation du cercle trigo)



Donc $S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice06 : $3pts(1pts \times 3)$ Résoudre dans l'intervalle I des équations suivantes :

1) $\tan x = \sin x$; $I = \mathbb{R}$

2) $\tan x = -\tan \frac{\pi}{12}$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

3) $\tan x \times \tan 2x = 1$; $I = \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$

Solution :1) $\tan x = \sin x$; $I = \mathbb{R}$

Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 0$

Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = 0$

Équivaut à : $\tan x(1 - \cos x) = 0$

Équivaut à : $\tan x = 0$ ou $1 - \cos x = 0$ c'est-à-dire : $\tan x = 0$ ou $\cos x = 1$

Équivaut à : $x = k\pi$ ou $x = 2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

2) $\tan x = -\tan \frac{\pi}{12}$; $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ Équivaut à : $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$

Or on a : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ donc : $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{12} + k < \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{12} - \frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$

Donc : $-\frac{5}{12} < k < \frac{7}{12}$ avec : $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k = 0$ et par suite : $x = -\frac{\pi}{12} + 0 \times \pi = -\frac{\pi}{12}$

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation dans $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est : $S=\left\{-\frac{\pi}{12}\right\}$

3) $\tan x\times\tan 2x=1$; $I=\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

Équivaut à : $\tan 2x=\frac{1}{\tan x}$ c'est à dire : $\tan 2x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-x+k\pi$ avec : $k\in\mathbb{Z}$ c'est à dire : $3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ avec : $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}<\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{4}<\frac{1}{6}+\frac{k}{3}<\frac{1}{4}$

Donc : $-\frac{3}{2}<1+2k<\frac{3}{2}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{2}<2k<\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{5}{4}<k<\frac{1}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $k=0$ ou $k=-1$ et par suite : $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=-\frac{\pi}{6}$

Donc les solutions de l'équation dans $I=\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ est : $S=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice07 : $(2,5pts)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : (E) :
$\sqrt{3}\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-1=0$

Solution :1) On pose $t=\tan x$ et l'équation (E) devient : $\sqrt{3}t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1=0$

On cherche les racines du trinôme $\sqrt{3}t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1$

Calcul du discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4\times1\times\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

Les racines sont : $t_1=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\times\sqrt{3}}=\frac{2}{2\times\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $t_2=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)-\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\times\sqrt{3}}=\frac{-2\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}}=-1$

Donc : $\tan x=-1$ et $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

- Pour : $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ Équivaut à : $\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

- Pour : $\tan x=-1$

$\tan x=-1$ Équivaut à : $\tan x=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}+k\pi\ /k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice08 : $(2,5\,pts)$ Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation suivante : $\cos 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : 1iér étape : On pose : $X = 2x$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ Équivaut à : $-\pi \leq 2x \leq \pi$

Équivaut à : $-\pi \leq X \leq \pi$

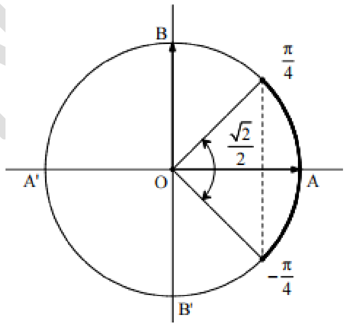
$\cos X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos X = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $X = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $X = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $X \in \left]-\pi;\pi\right]$ alors : $X = -\frac{\pi}{4}$ ou $X = \frac{\pi}{4}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos X$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\left]-\pi;\pi\right]$:

$\begin{cases} \cos X \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\pi \leq X \leq \pi \end{cases}$ Équivaut à : $X \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$



2iém étape : Or : $X = 2x$

$X \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}$ Équivaut à : $-\frac{\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8}$

Donc : $S = \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien