Correction : Devoir surveillé n°5 / A sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $4pts(1,5pts+1pts+1pts+0,5pts)$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=-x^2+2x+2$

1) Calculer les images de $\frac{-1}{2}$ et $\sqrt{3}$ par f.

2) Montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f
3) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f
4) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 3)

Solution : 1) Calcul des images :

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=-\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{-1}{2}\right)+2=-\frac{1}{4}-1+2=\frac{3}{4}$ et $f\left(\sqrt{3}\right)=-\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\left(\sqrt{3}\right)+2=-3+2\sqrt{3}+2=-1+2\sqrt{3}$

2) Pour montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f il suffit de montrer que : $f\left(1+\sqrt{2}\right)=1$?

$$f\left(1+\sqrt{2}\right)=-\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2\times\left(1+\sqrt{2}\right)+2=-\left(1+2\sqrt{2}+2\right)+2+2\sqrt{3}+2=-3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4=1$$

Donc : $f\left(1+\sqrt{2}\right)=1$ par suite : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à : $-x^2+2x+2=0$ $a=-1$ et $b=2$ et $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times(-1)=4+8=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{3}}{-2}=1-\sqrt{3}$ et $x_1=\frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}=1+\sqrt{3}$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

4) les antécédents éventuels de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A\left(1-\sqrt{3};0\right)$ et $B\left(1+\sqrt{3};0\right)$

Exercice02 : $3,5pts(2pts+1,5pts)$

Soient les fonctions suivantes définie par : $f(x)=\frac{-6x^3+\cos x-1}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$. 2) $g(x)=\frac{x}{|x+2|-|x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f e g
2) Etudier la parité de la fonction g et en déduire une interprétation géométrique du résultat

Solution : 1)a) $f(x)=\frac{-6x^3+\cos x-1}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2+2x-1>0\right\}$

$3x^2+2x-1$: Soit Δ son discriminant : $c=-1$ et $b=2$ et $a=3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times3\times(-1) = 4+12 = 16 = (4)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times3} = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times3} = \frac{-2-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f =]-\infty,-1[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

b) $g(x) = \frac{x}{|x+2|-|x-2|}$. $D_g = \{x\in\mathbb{R} / |x+2|-|x-2| \neq 0\}$

$|x+2|-|x-2| = 0$ Signifie $|x-2| = |x+2|$

Signifie $x-2 = x+2$ ou $x-2 = -(x+2)$

Signifie $x-x = 2+2$ ou $x-2 = -x-2$

Signifie $0 = 4$ ou $2x = 0$

Signifie $x = 0$ car $0 = 4$ (impossible) ; Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

2) - Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $g(-x) = \frac{(-x)^2}{|-x+2|-|-x-2|} = \frac{x^2}{|-(x-2)|-|-(x+2)|} = \frac{x^2}{|x-2|-|x+2|}$ car $|-x| = |x|$

$g(-x) = \frac{x^2}{-(|x+2|-|x-2|)} = -\frac{x^2}{|x+2|-|x-2|} = -g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_g)

Exercice03 : $11pts(0,5pts+1,5pts+2pts+0,5pts$
$;0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+2pts+1pts+0,5pts+1pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1)Préciser le domaine de définition de f

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3)Etudier la monotonie de f sur : $I = [-1;+\infty[$ et sur $J =]-\infty;-1]$

4)Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x) \leq 2$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ On a : $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-3;-1]$ On a : $-2 \leq f(x) \leq 2$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = -x-1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x) < f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2 - 2x + m - 1 = 0$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Solution : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2)Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-x_2^2 - 2x_2 + 1) - (-x_1^2 - 2x_1 + 1)}{x_2 - x_1} = \frac{-x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_1^2 + 2x_1 - 1}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{-x_2^2 + x_1^2 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{-(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(-(x_2 + x_1) - 2)}{x_2 - x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2) = -(x_1 + x_2) - 2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I = [-1;+\infty[$

Soient : $x_1 \in [-1;+\infty[$ et $x_2 \in [-1;+\infty[$ alors $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ implique $x_1 + x_2 \geq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \leq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \leq 0$

Donc $T(x_1;x_2) \leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I = [-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty;-1]$

Soient : $x_1 \in]-\infty;-1]$ et $x_2 \in]-\infty;-1]$ alors : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ cela implique $x_1 + x_2 \leq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \geq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \geq 0$

Donc $T(x_1;x_2) \geq 0$

D'où : f est croissante sur $J =]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

Donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1) = 2$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq f(-1)$

Par suite : $f(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Soit : $x \in \left[-1;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I = [-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(-1)$

et comme : $f(-1)=2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}-1+1=-\frac{1}{4}$ Par suite : $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 2$

b) Soit : $x\in[-3;-1]$ On a alors : $-3\leq x\leq -1$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J=]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-3;-1]$

Alors : $f(-3)\leq f(x)\leq f(-1)$ et comme : $f(-3)=-(-3)^2-2\times(-3)+1=-9+6+1=-2$ et $f(-1)=2$

Par suite : $-2\leq f(x)\leq 2$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2-2x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times(-1)\times1=4+4=8>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{-2}=-1-\sqrt{2}$ **et** $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{-2}=-1+\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A\left(-1-\sqrt{2};0\right)$ et $B\left(-1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

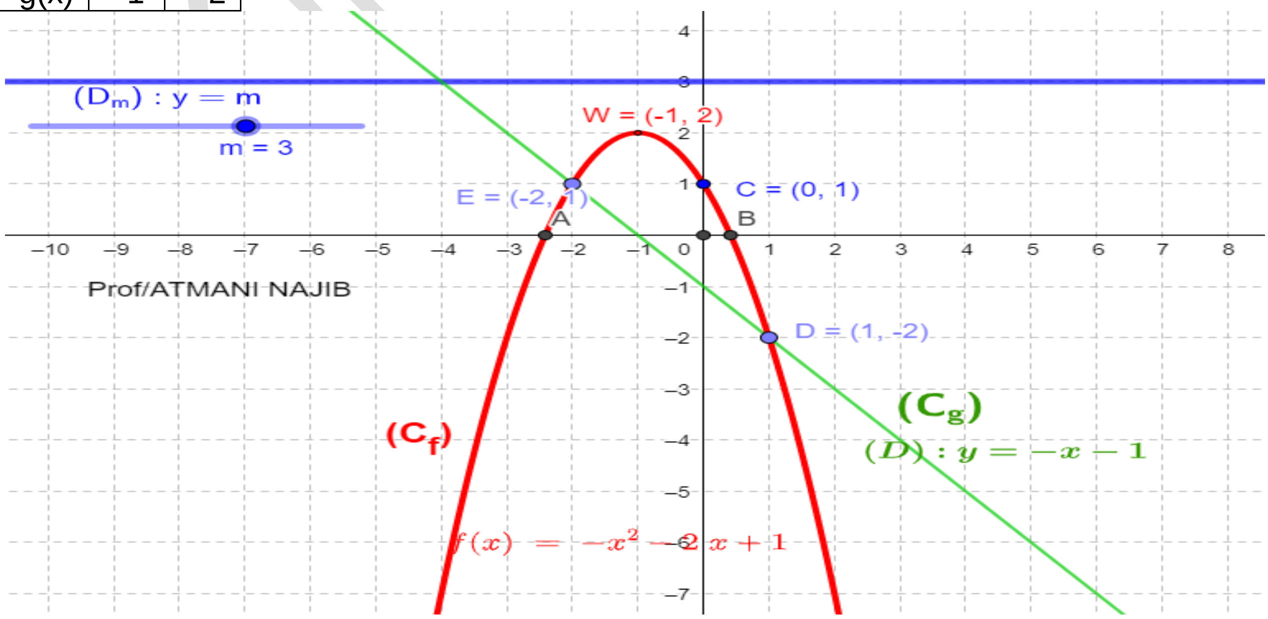
Et on a $f(0)=-0^2-2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-7	-2	1	2	1	-2	-7

x	-2	1
g(x)	1	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=1$ donc $S=\{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2-2x+1=-x-1$ c'est-à-dire : $-x^2-x+2=0$ c'est-à-dire :

$x^2+x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times1=1+8=9>0$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{-1-3}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$ Donc : $S=\{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)\geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)\geq f(x)$:

$g(x)\geq f(x)$ Signifie $-x-1\geq -x^2-2x+1$

C'est-à-dire : $x^2+x-2\geq 0$

Les racines sont : $x_1=1$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+1-m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$-x^2-2x+1-m=0$ Signifie $m=-x^2-2x+1$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>2$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=2$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m<2$ il y'a deux solutions

Exercice04 : $(1,5\,pts)$ Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=5x^2+3$

Montrer que $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq0$ donc $5x^2\geq0$ car $5\succ0$

Par suite $5x^2+3\geq3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

D'où : $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien