Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°5 /B sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01: $5pts(0,5pts+1pts+2pts+0,5pts+1pts)$

Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

1) Déterminer D_g.

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de g entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$.

3) Etudier les variations de g sur les intervalles $I=]-\infty;-1[$ et $J=]-1;+\infty[$.

4) Dresser son tableau de variation de f.

5) En déduire une comparaison des nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solution : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à : $x+1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq -1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3) a) Sur $I=]-\infty;-1[$

Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec -1$ et $x_2\prec -1$ Donc $x_1+1\prec 0$ et $x_2+1\prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $I=]-\infty;-1[$

D'où : g est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b) Sur $J=]-1;+\infty[$

Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc : $x_1\succ -1$ et $x_2\succ -1$ Donc $x_1+1\succ 0$ et $x_2+1\succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ 0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ 0$ sur $J=]-1;+\infty[$

D'où : g est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

4) <u>Résumé</u> : tableau de variation **:**

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

5) On a $-\sqrt{2}\in\left]-\infty;-1\right[$ et $-\sqrt{3}\in\left]-\infty;-1\right[$ et $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$

D'après le tableau de variation de g on a : g est strictement croissante sur $J=\left]-1;+\infty\right[$

Alors : $g\left(-\sqrt{3}\right)<g\left(-\sqrt{2}\right)$

Donc : $\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}<\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+1}$

Donc : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

Exercice08 : $14pts(0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts$
$;1pts+1pts+2pts+1pts+1pts+0,5pts+1pts+0,5pts+1pts+0,5pts+1pts$

On considère les fonctions : $f\left(x\right)=x^2-2x$ et $g\left(x\right)=\frac{x}{x-2}$ et $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2-1$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g\left(x\right)=1+\frac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de f
4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de g
5)Déterminer les points d'intersection de $\left(C_f\right)$ avec les axes du repère

6)Déterminer les points d'intersection de $\left(C_g\right)$ avec les axes du repère

7)Tracer les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans le même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

8) Déterminer algébriquement les points d'intersection de $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$

10)Soit h la fonction définie par : $h\left(x\right)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h
b) Montrer que la fonction h est paire
c)Vérifier que $h\left(x\right)=g\left(x\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

11)Tracer la courbes $\left(C_h\right)$ de h et $\left(C_g\right)$ dans un même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

12)Soit K la fonction définie par : $K\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$

a) Tracer la courbes $\left(C_K\right)$ de K dans le même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K\left(x\right)=m$

Solution :1) $f\left(x\right)=x^2-2x$ et $g\left(x\right)=\frac{x}{x-2}$

Dans l'expression de $f\left(x\right)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle : Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x-2=0$ soit $x=2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=x^2-2x=x^2-2x+1^2-1^2=x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2$

Donc : $f(x)=(x-1)^2-1$ (la forme canonique)

b) Vérifions que : $g(x)=1+\dfrac{2}{x-2}$ si $x\in D_g$

$1+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{x-2+2}{x-2}=\dfrac{x}{x-2}=g(x)$ (La forme réduite)

3)a) <u>Méthode1 :</u> On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=0$ $\quad f(x)=x^2-2x\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times 1}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(1)=1^2-2\times 1=-1$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)=W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

<u>Méthode2 :</u> On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x)=(x-1)^2-1$ si $x\in\mathbb{R}$: $\alpha=-1$ et $\beta=-1$

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-(-1);-1)$ c'est-à-dire : $W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-(-1)=1$

b) Le tableau de variations de f : $a=1>0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

4)a) <u>Méthode1 :</u>On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=1+\dfrac{2}{x-2}$ avec : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=2>0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=2$ et $y=1$

Et puisque : $k=2>0$ alors : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ *et* $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Méthode2 : (on utilisant un résumé de notre cours)

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{1x+0}{x-2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{-2}{1}=2$ et $y=\frac{1}{1}=1$

$\det g=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 0=-2<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ *et* $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

5)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

$f(x)=x^2-2x$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x=0$

Signifie $x(x-2)=0$

Signifie $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie $x=0$ ou $x=2$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $O(0;0)$ et $A(2;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(2,0);O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times 0=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

6)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

$g(x)=\frac{x}{x-2}$

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie $\frac{x}{x-2}=0$

Signifie $x=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $O(0;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=\frac{0}{0-2}=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

$(C_g)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

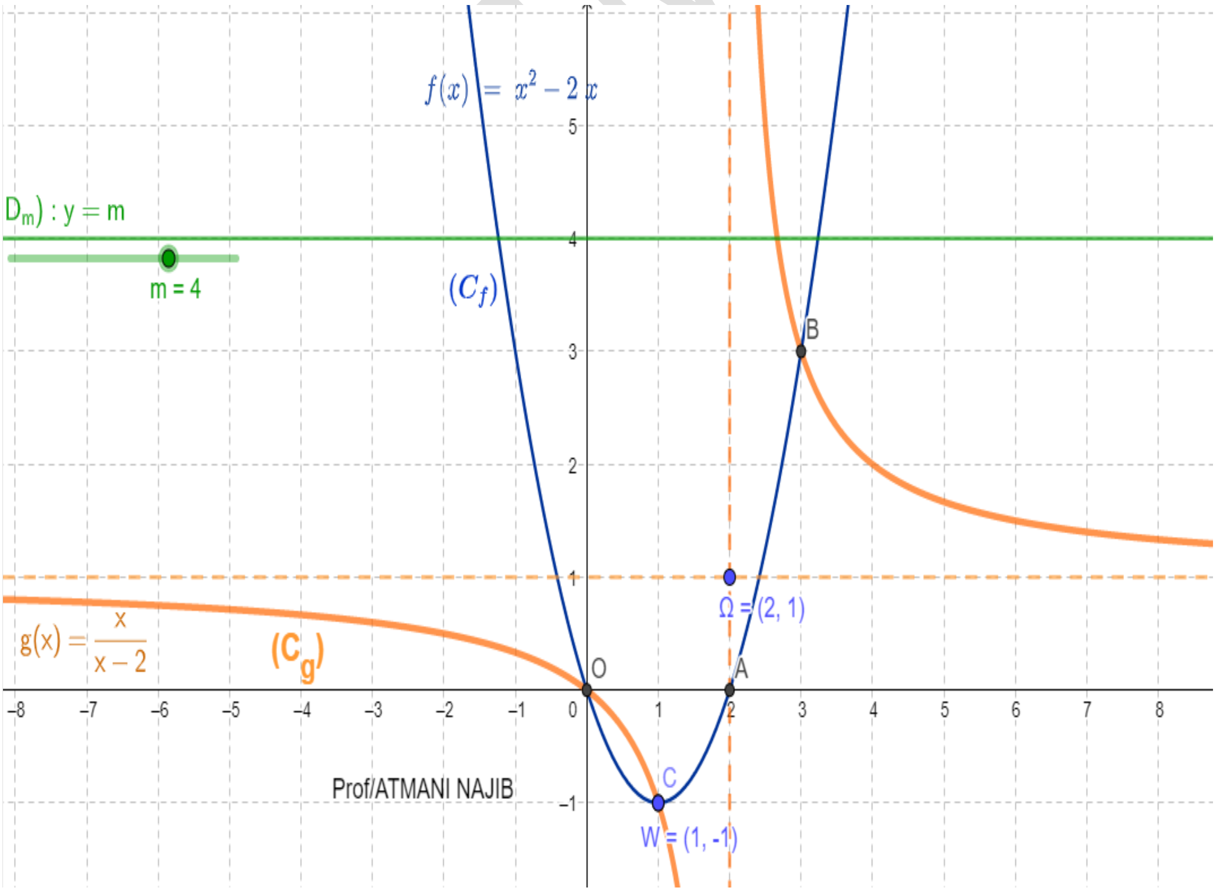
7)Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

La courbe (C_g) :

-2	**-1**	**0**	**2**	**3**	4	4
5/3	2	3		3	2	5/3

La courbe (C_f) : $f(x)=x^2-2x$

x	2	3	4
$f(x)$	0	3	8



8) Déterminons algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x=\frac{x}{x-2}$

Signifie que : $x(x-2)-\frac{x}{x-2}=0$

Signifie que : $x\left(x-2-\frac{1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1^2}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $\frac{x(x-3)(x-1)}{x-2}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x(x-3)(x-1)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$ ou $x-3=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=1$ ou $x=3$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{C(1,-1);O(0,0);B(3,3)\}$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\le g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessous de (C_g)

Donc : graphiquement : $S=[0,1]\cup]2,3]$

10)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\}$; $|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$

- $h(-x)=\frac{|-x|}{|-x|-2}=\frac{|x|}{|x|-2}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

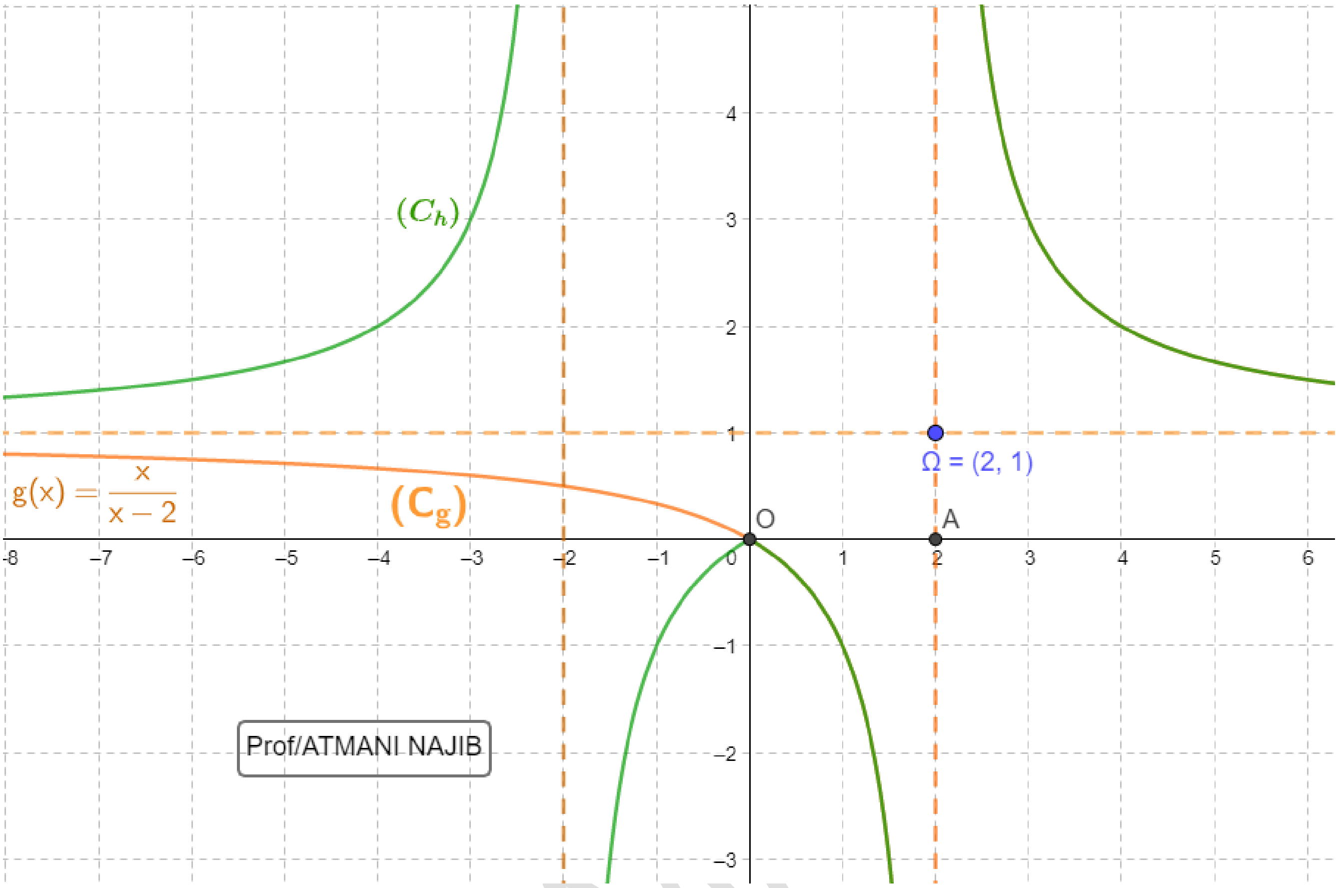
Donc h est une fonction paire,

c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

Soit : $\mathbb{R}^+-\{2\}$ on a : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}=g(x)$ car $|x|=x$

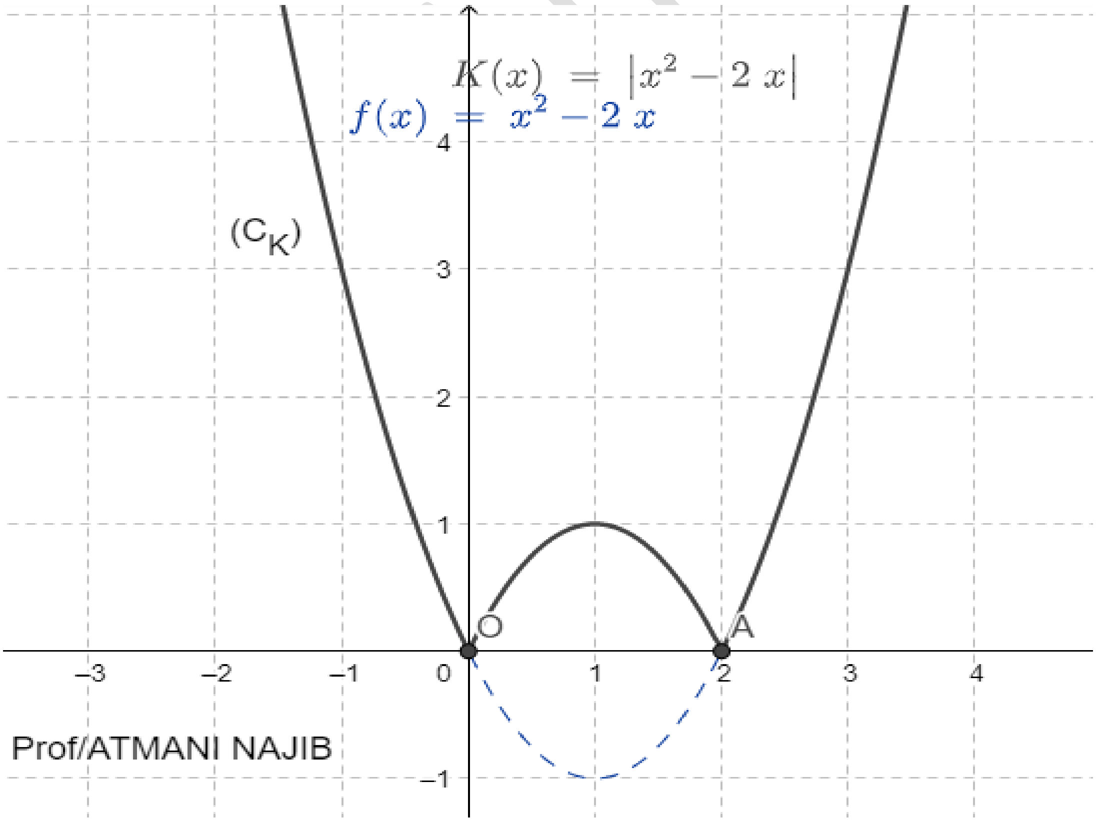
Donc : $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+} - \{2\}$

11) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

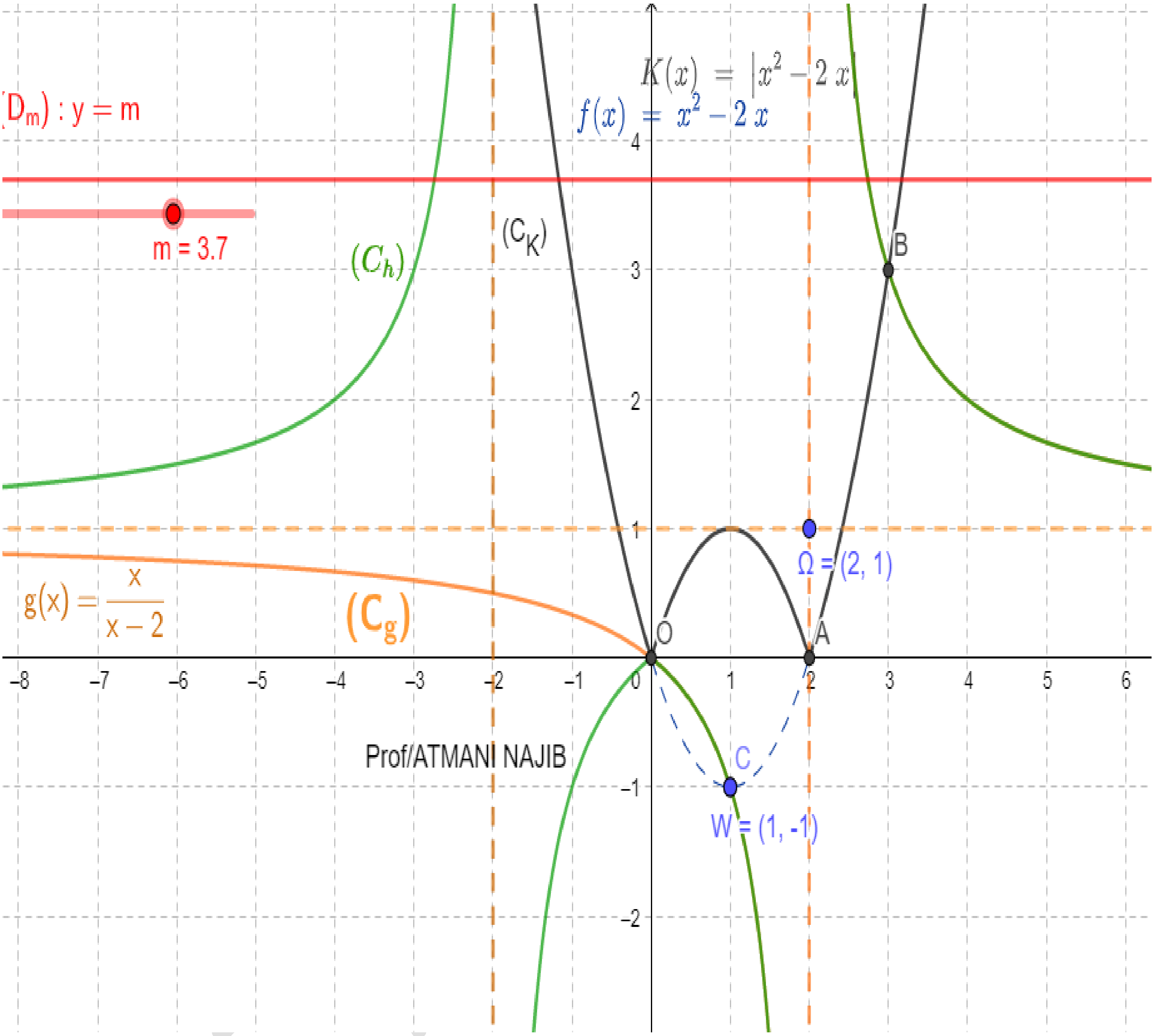


12)Soit K la fonction définie par : $K(x) = |f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



Remarque : tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$: est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m)\quad y=m$

▻ Si $m<1$: l'équation n'a pas de solutions
▻ Si $m=0$: l'équation admet deux solutions
▻ Si $0<m<1$: l'équation admet 4 solutions
▻ Si $m=1$: l'équation admet 3 solutions
▻ Si $m>1$: l'équation admet deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien