Correction : Devoir surveillé n°5/C sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $4,5pts(1pts+1pts+1,5pts+1pts)$

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{1}{|x|+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2) Calculer les images de : 0 et -2 par f.
3) Les nombres : $\frac{1}{2}$; 1 et 2 ont-ils des antécédents par f ? si oui, trouver ces antécédents
4) Montrer que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) $D_f=\{x\in E/\ f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E/|x|+1\neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $|x|+1$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Calculons les images de : 0 et -2 par f.

- $f(0)=\frac{1}{|0|+1}=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1$

Donc : l'image de 0 par f est : 1

- $f(-2)=\frac{1}{|-2|+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$; Donc : l'image de -2 par f est : $\frac{1}{3}$

2) a) Déterminons les antécédents de : $\frac{1}{2}$ par f s'ils existent :

x est l'antécédents de $\frac{1}{2}$ par f signifie que $\frac{1}{2}$ est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\frac{1}{2}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|+1=2$

Signifie que : $|x|=1$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-1$

Par suite : les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont : 1 et -1.

b) Déterminons les antécédents de : 1 par f s'ils existent :

x Est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=1$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=1$ Signifie que : $|x|+1=1$

Signifie que : $|x|=0$

Signifie que : $x=0$

Par suite :1 admet un unique antécédent par f c'est : 0

c) Déterminons les antécédents de : 2 par f s'ils existent :

x est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=2$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=2$ Signifie que : $|x|+1=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ (impossible)

Par suite : 2 n'admet pas d'antécédents par f

3) Montrons que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

On a déjà vu que : $f(0)=1$

Il suffit de montrer que : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $|x|\geq 0$ donc : $|x|+1\geq 1$ donc : $\frac{1}{|x|+1}\leq 1$

Donc : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Par suite : $f(0)=1$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 02 : $6pts(1pts+1pts+0,5pts+0,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts+1pts)$ Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Donner une interprétation graphique de ce résultat

4) Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=3-\frac{7}{x^2+2}$

5) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

6) Dresser le tableau de variation de f

7) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2}$

1) $D_f=\{x\in E / x^2+2\neq 0\}$

$x^2+2=0$ Signifie $x^2=-2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+2 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\dfrac{3(-x)^2-1}{(-x)^2+2}=\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}=f(x)$ Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Une interprétation graphique : puisque f est une fonction paire alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie à la courbe de f .

4) Montrons que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=3-\dfrac{7}{x^2+2}$

Méthode1 : $3-\dfrac{7}{x^2+2}=\dfrac{3(x^2+2)-7}{x^2+2}=\dfrac{3x^2+6-7}{x^2+2}=\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}$

Donc : $3-\dfrac{7}{x^2+2}=f(x)$

Méthode2 : $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2+2}=\dfrac{3x^2+6-6-1}{x^2+2}=\dfrac{3(x^2+2)-7}{x^2+2}=\dfrac{3(x^2+2)}{x^2+2}-\dfrac{7}{x^2+2}$

Donc : $f(x)=3-\dfrac{7}{x^2+2}$

5) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

soient $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$ tel que : $x_1<x_2$

$x_1<x_2$ Implique : $x_1^2<x_2^2$

Implique : $x_1^2+2<x_2^2+2$

Implique : $\dfrac{1}{x_2^2+2}<\dfrac{1}{x_1^2+2}$

Implique : $\dfrac{-7}{x_1^2+2}<\dfrac{-7}{x_2^2+2}$

Implique : $3-\dfrac{7}{x_1^2+2}<3-\dfrac{7}{x_2^2+2}$

Implique : $f(x_1)<f(x_2)$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

6) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$

7)D'après le tableau de variation de f on a : $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 03 : $9,5pts(0,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ pour tout $x\in D_f$

b) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de f

c) Tracer la courbe (C_f)

2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)>0$

3) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

a) Montrer que la courbe (C_g) c'est une parabole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de g

b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$

(μ La solution de l'équation : $g(x)=f(x)$ n'est pas demandé de la déterminer)

Solutions : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ a) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Montrons que : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1-1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$

Donc : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) On utilisant le résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ avec : $\alpha=-1$ et $\beta=1$ et $k=-1\prec 0$

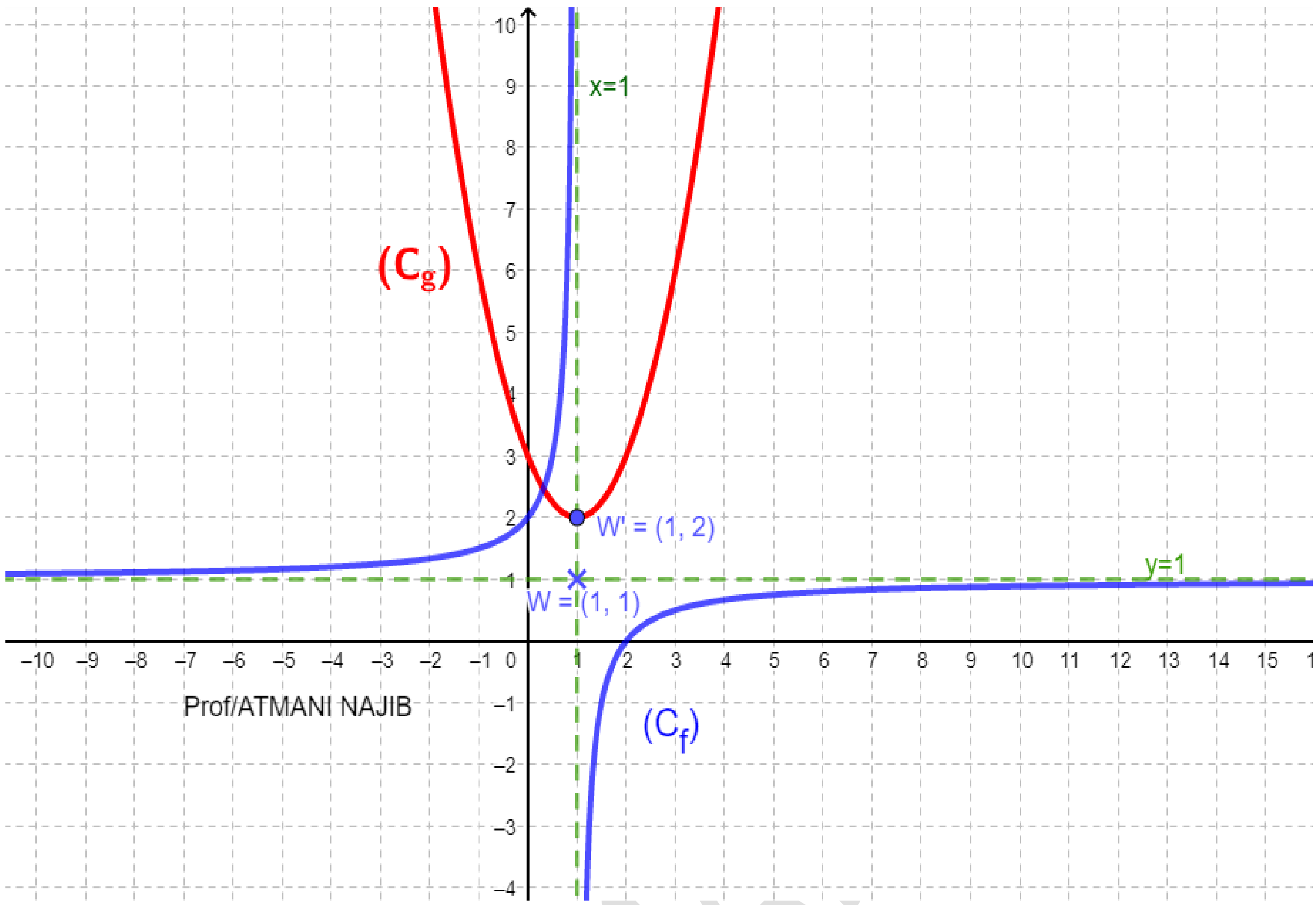
Donc (C_f) est une hyperbole de centre $W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :
$x=1$ et $y=1$

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad$ 1	1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

c)La courbe (C_f) : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

-2	**-1**	**0**	**1**	**2**	3	4
4/3	3/2	2		0	1/2	2/3



2) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)>0$

$f(x)>0$ Equivaut à : x appartient à l'intervalle ou (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses

Donc : $S =]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

3) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

On a g est une fonction polynôme donc : $D_g=\mathbb{R}$

Méthode1 : $g(x)=x^2-2x+3=x^2-2x+1-1+3=(x-1)^2+2=1(x-1)^2+2$

Donc : $g(x)=1(x-1)^2+2$ et $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Donc $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $a=1$

Méthode2 : $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=3$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=-1$ et $\beta=g(-\alpha)=g(1)=(1)^2-2\times(1)+3=2$

Donc : $g(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=1(x-1)^2+2$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole de sommet $W'(-\alpha;\beta)$: $W'(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de g : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

c) Résolution graphique de l'inéquation : $\frac{g(x)}{f(x)}>1$

$\frac{g(x)}{f(x)} > 1$ Equivaut à : Equivaut à : $\frac{g(x)-f(x)}{f(x)} > 0$

Donc : on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		μ		1		2		$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\|$	$+$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$	

Donc : $S =]-\infty ; \mu[\cup]2;+\infty[$

l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien