Correction : Devoir surveillé n°5/D sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $5pts(1pts+1,5pts+1pts+1pts+0,5pts)$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=2x+6-(x-3)^2$

1)Développer puis factoriser : $f(x)$

2) En choisissant l'expression la mieux adaptée (développée ou factorisée), calculer les images de : $\frac{-1}{2}$ et 0 et $\sqrt{13}$ par f.

3) Montrer que : $4-2\sqrt{3}$ est un antécédent de 1 par f

4) Déterminer les antécédents de 0 par f

5) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 4)

Solution : 1) $f(x)=2x+6-(x+3)^2$

Développement de $f(x)$: $f(x)=2x+6-(x^2-6x+9)=2x+6-x^2+6x-9=-x^2+8x-3$

Donc : $f(x)=-x^2+8x-3$

Factorisation de $f(x)$: $f(x)=-x^2+8x-3$; $a=-1$ et $b=8$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-3)\times(-1)=64-12=52=\left(2\sqrt{13}\right)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-8+2\sqrt{13}}{-2}=4-\sqrt{13}$ et $x_2=\frac{-8-2\sqrt{13}}{-2}=4+\sqrt{13}$

Donc : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=-\left(x-4+\sqrt{13}\right)\left(x-4-\sqrt{13}\right)$

2) Calcul des images :

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=-\left(\frac{-1}{2}\right)^2+8\times\left(\frac{-1}{2}\right)-3=-\frac{1}{4}-4-3=-\frac{1}{4}-7=-\frac{29}{4}$ et $f\left(\sqrt{13}\right)=-\left(\sqrt{13}\right)^2+8\times\left(\sqrt{13}\right)-3=-13+8\sqrt{13}-3=-16+8\sqrt{13}$

$f(0)=-0^2+8\times0-3=-0+0-3=-3$

3) Pour montrer que : $4-2\sqrt{3}$ est un antécédent de 1 par f il suffit de montrer que : $f\left(4-2\sqrt{3}\right)=1$?

$f\left(4-2\sqrt{3}\right)=-\left(4-2\sqrt{3}\right)^2+8\times\left(4-2\sqrt{3}\right)-3=-\left(16-16\sqrt{3}+12\right)+32-16\sqrt{3}-3=-16+16\sqrt{3}-12+32-16\sqrt{3}-3=1$

Donc : $f\left(4-2\sqrt{3}\right)=1$ par suite : $4-2\sqrt{3}$ est un antécédent de 1 par f

4) x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à $-\left(x-4+\sqrt{13}\right)\left(x-4-\sqrt{13}\right)=0$

Équivaut à $x-4+\sqrt{13}=0$ ou $x-4-\sqrt{13}=0$

Équivaut à $x=4-\sqrt{13}$ ou $x=4+\sqrt{13}$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : $4-\sqrt{13}$ et $4+\sqrt{13}$.

5) Les antécédents éventuels de 0 par f sont $4-\sqrt{13}$ et $4+\sqrt{13}$.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A\left(4-\sqrt{13};0\right)$ et $B\left(4+\sqrt{13};0\right)$

Exercice02 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :1) $f(x)=\dfrac{-x^2+2025x+1}{3x^2+2x-1}$. 2) $f(x)=-2023x^2+2024x+2025+\sqrt{3x^2+2x-1}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{-x^2+2025x+1}{3x^2+2x-1}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+2x-1\neq 0\right\}$

$3x^2+2x-1=0$ $a=3$ et $b=2$ et $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 3\times(-1)=4+12=16=(4)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3}=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ et $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3}=\dfrac{-2-4}{6}=\dfrac{-6}{6}=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\dfrac{1}{3}\right\}$ ou $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

2) $f(x)=-2023x^2+2024x+2025+\sqrt{3x^2+2x-1}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x^2+2x-1\geq 0\right\}$

$3x^2+2x-1$: Soit Δ son discriminant : $c=-1$ et $b=2$ et $a=3$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 3\times(-1)=4+12=16=(4)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3}=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ et $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3}=\dfrac{-2-4}{6}=\dfrac{-6}{6}=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

Exercice04 : $3pts(0,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts)$

Soit la fonction numérique : $f(x)=-4x^3+\dfrac{1}{2x}$

1) Déterminer D_f 2) Etudier la parité de f

3) Donner une interprétation graphique de ce résultat

4) Montrer que : $f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

5) Montrer que la fonction : $g(x)=f(x)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

Solution :1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[=\mathbb{R}-\{0\}$

-2) Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=-4(-x)^3+\frac{1}{2(-x)}=-\left(-4x^3+\frac{1}{2x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

Cela signifie que : f est une fonction impaire

3) Une interprétation graphique : puisque f est une fonction impaire alors $O(0;0)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

4) Pour tout $x\in D_f$ nous avons : $f(x)-f(-x)=f(x)-(-f(x))$ Car f est une fonction impaire

Donc : $f(x)-f(-x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

D'où : $f(x)-f(-x)=2f(x)$ par suite : $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

5) $g(x)=f(x)+1=-4x^3+\frac{1}{2x}+1$; on a : $D_g=\mathbb{R}^*$

$g(-1)=-4(-1)^3+\frac{1}{2(-1)}+1=\frac{9}{2}$ et $g(1)=-4(1)^3+\frac{1}{2\times 1}+1=-\frac{5}{2}$ et $-g(1)=\frac{5}{2}$

Nous remarquons que : $g(-1)\neq -g(1)$ et $g(-1)\neq g(1)$

Cela signifie que : la fonction g est ni paire ni impaire,

Exercice07 : $4,5pts(0,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts+2pts)$

Partie A : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2+4x-2$

(C_f) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (déterminer a; α et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B : $4,5pts(0,5pts+1pts+0,5pts+1,5pts+1pts)$

Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ (C_g) Sa courbe représentative

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)<g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-2,7$; $0,5$; $1,3$

Solution : Partie A : 1) On a : f est une fonction polynôme ; donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=2x^2+4x-2=2(x^2+2x)-2=2\left((x+1)^2-1\right)-2=2(x+1)^2-2-2=2(x+1)^2-4$

Donc : $f(x)=2x^2+4x-2=2(x+1)^2-4$ Donc $\alpha=1$ et $\beta=-4$ et $a=2$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=-2$

Donc $\alpha = \frac{b}{2a} = \frac{4}{2\times 2} = 1$ et $\beta = f(-\alpha) = f(-1) = 2(-1)^2 + 4\times(-1) - 2 = -4$

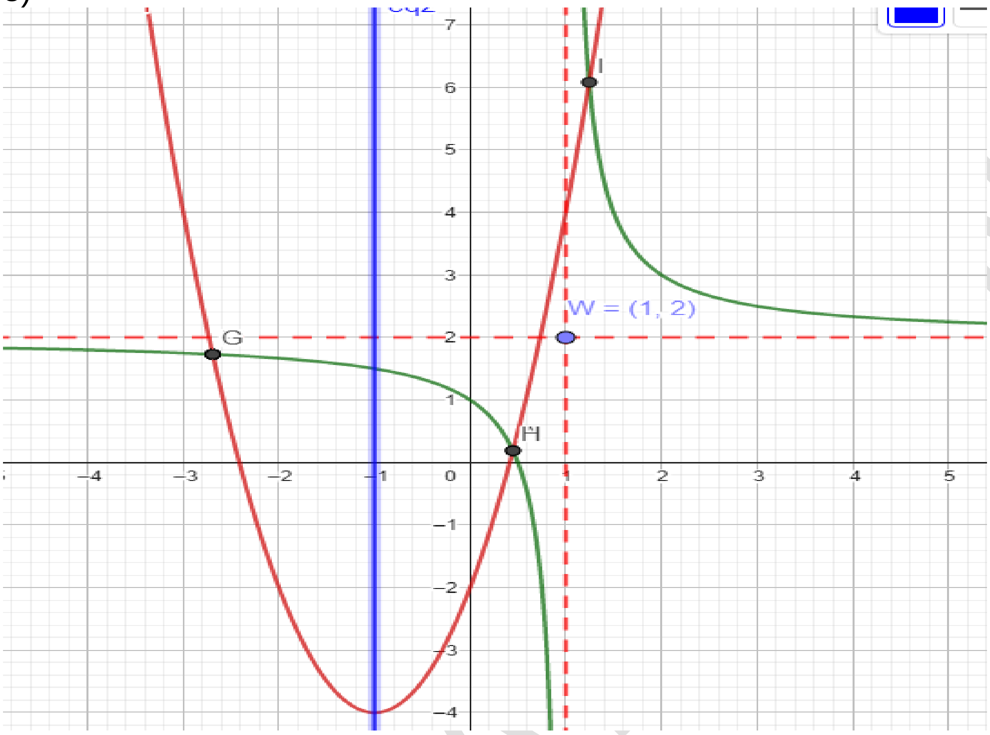
Donc : $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta = 2(x+1)^2 - 4$

3) la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-\alpha;\beta)$; $W(-1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. $x=-1$

4)Tableau de variations de f : On a $a=2>0$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗

3)



Partie B :**1)** Soit g une fonction numérique : $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

$D_g = \{x\in\mathbb{R} / x-1\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R} / x\neq 1\}$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : la division euclidienne de : $2x-1$ par $x-1$ donne : $2x-1 = 2(x-1)+1$

$g(x) = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ Donc : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et $k = 1 > 0$

3) Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$; $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$

4) Le tableau de variations de :

$k=1>0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	↘	‖	↘

5) Voir partie1

6)

x	1	2	3	4
g(x)		3	5/2	7 /3

6) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x) < g(x)$

(On admet que (C_g) coupe (C_f) en 3 points d'abscisse : $-2,7$; $0,5$; $1,3$

(C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in \left]-2,7;0,5\right[\cup \left]1;1,3\right[$

Donc : $S = \left]-2,7;0,5\right[\cup \left]1;1,3\right[$

Exercice02 : $3,5pts(2pts + 1,5pts)$

Exercice03 : $11pts(0,5pts + 1,5pts + 2pts + 0,5pts$

Exercice04 : $(1,5pts)$ Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$