Correction : Devoir surveillé n°5/E sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $5pts(1pts+1,5pts+1pts+1pts+0,5pts)$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x-2-(x-2)^2$

1) Factoriser puis Développer : $f(x)$

2) En choisissant l'expression la mieux adaptée (développée ou factorisée), calculer les images de 2 et 0 et $\sqrt{2}$ par f.

3) Montrer que : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ est un antécédent de -1 par f

4) Déterminer les antécédents de 0 par f

5) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 4)

Solution : 1) $f(x)=x-2-(x-2)^2$

Factorisation de $f(x)$: $f(x)=x-2-(x-2)^2=(x-2)\left[1-(x-2)\right]=(x-2)(-x+3)=-(x-2)(x-3)$

Donc : $f(x)=-(x-2)(x-3)$

Développement de $f(x)$: $f(x)=x-2-(x-2)^2=x-2-x^2+4x-4=-x^2+5x-6$

Donc : $f(x)=-x^2+5x-6$

2) Calcul des images :

$f(2)=-(2-2)(2-3)=0$ et $f0=-0^2+5\times0-6=-6$

$f\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}^2+5\sqrt{2}-6=-2+5\sqrt{2}-6=-8+5\sqrt{2}$

3) Pour montrer que : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ est un antécédent de -1 par f il suffit de montrer que : $f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-1$?

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2+5\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)-6=-\frac{1}{4}\left(25-10\sqrt{5}+5\right)+\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)-6$$

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(15-5\sqrt{5}\right)+\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)-6=\frac{-15+5\sqrt{5}+25-5\sqrt{5}-12}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Donc : $f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-1$ par suite : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ est un antécédent de -1

4) x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à $-(x-2)(x-3)=0$

Équivaut à $x-2=0$ ou $x-3=0$

Équivaut à $x=2$ ou $x=3$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : 2 et 3.

5) Les antécédents de 0 par f sont 2 et 3.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A(2;0)$ et $B(3;0)$

Exercice02 : $7\,pts(0,5\,pts+0,5\,pts+0,5\,pts+0,5\,pts+1\,pts+1\,pts+2\,pts+1\,pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{-x+3}{x+1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : $f(x)=-1+\dfrac{4}{x+1}$ pour tout $x\in D_f$

3) a) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer son centre et ses asymptotes

b) Déterminer le tableau de variations de f et tracer la courbe (C_f)

4) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{-|x|+3}{|x|+1}$

a) Déterminer D_g b) Etudier la parité de g c) Tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

d) Déterminer le tableau de variations de g

Solutions : 1) $f(x)=\dfrac{-x+3}{x+1}$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq -1\}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Montrons que : $f(x)=-1+\dfrac{4}{x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ on a : $-1+\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{-x-1+4}{x+1}=\dfrac{-x+3}{x+1}$

Donc : $f(x)=-1+\dfrac{4}{x+1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

3)a) On utilisant le résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $f(x)=-1+\dfrac{4}{x+1}$ avec : $\alpha=1$ et $\beta=-1$ et $k=4$

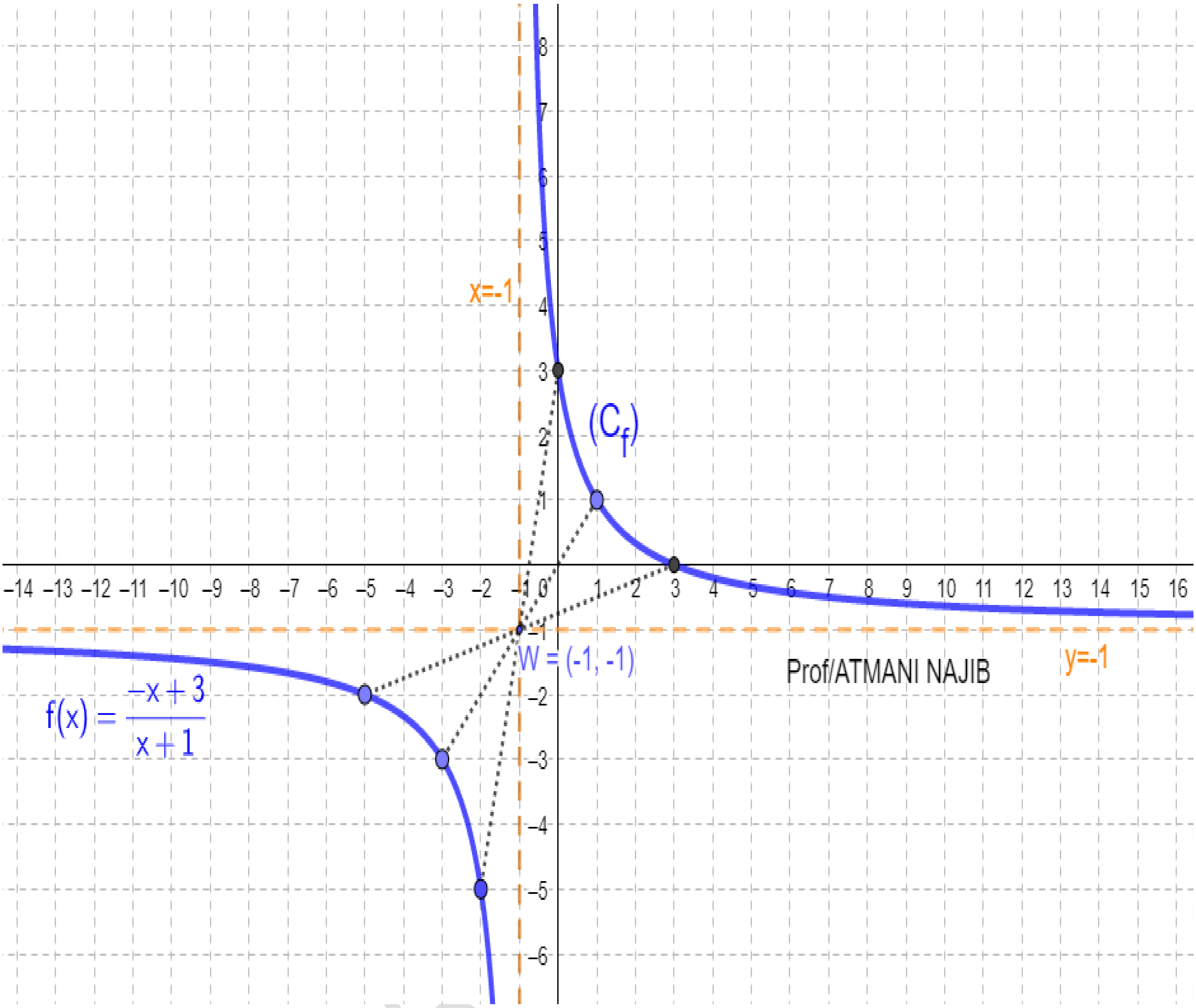
Donc (C_f) est une hyperbole de centre $W(-1;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :
$x=-1$ et $y=-1$

b) Le tableau de variations de f : $k=4\succ 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

- 4	**- 3**	**-2**	**-1**	**0**	1	2
-7/3	-3	-5		3	1	1/3

La courbe (C_f) :



4) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{-|x|+3}{|x|+1}$

On a : $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|+1\neq 0$

Signifie $|x|\neq -1$ Par suite : $D_g=\mathbb{R}$

b) Etudions la parité de g :

☞ si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

$-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\frac{-|-x|+3}{|-x|+1}=\frac{-|x|+3}{|x|+1}$ car $|-x|=|x|$

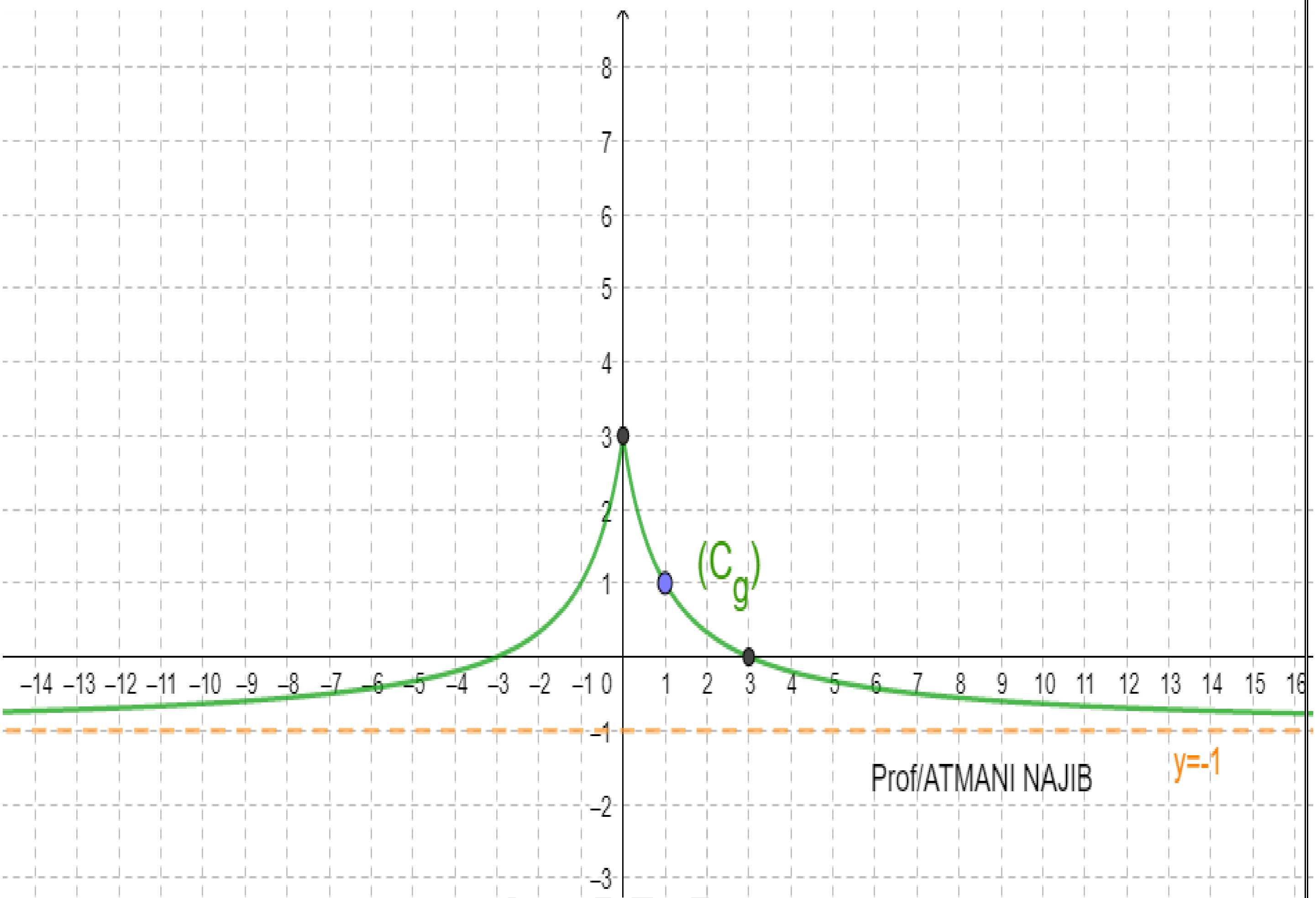
Donc : $g(-x)=g(x)$ Par suite : g est paire

c)La courbe (C_g) : Puisque g est paire alors la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On représente alors (C_g) sur $[0;+\infty[$ et trace son symétrique sur $]-\infty;0]$

Or sur $[0;+\infty[$: on a $g(x)=\frac{-|x|+3}{|x|+1}=\frac{-x+3}{x+1}=f(x)$

Donc la courbe (C_g) est:



d) d’après la courbe représentative de g on déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

Exercice03: $8pts(0,5pts+1pts+1,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$ Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+6x-2$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+6$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur : $I=[-3;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur : $J=]-\infty;-3]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $-11\leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-2;2]$ On a : $-10\leq f(x)\leq 14$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-6;-4]$ On a : $-10\leq f(x)\leq -2$

Solution : $f(x)=x^2+6x-2$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+6x_2-2)-(x_1^2+6x_1-2)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+6x_2-2-x_1^2-6x_1+2}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^{\,2}-x_1^{\,2}+6(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+6(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+6)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=x_2+x_1+6$

3)a) Montrons que f est strictement croissante sur $[-3;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-3;+\infty[$ et $x_2\in[-3;+\infty[$ alors : $x_1\geq -3$ et $x_2\geq -3$ avec $x_1\neq x_2$ implique $x_1+x_2>-6$

Par suite : $x_1+x_2+6>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-3;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-3]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-3]$ et $x_2\in]-\infty;-3]$ alors : $x_1\leq -3$ et $x_2\leq -3$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique $x_1+x_2<-6$

Par suite : $x_1+x_2+6<0$

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est décroissante sur $J=]-\infty;-3]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-3)=(-3)^2+6\times(-3)-2=9-18-2=-11$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-3)=-11$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-3)\leq f(x)$

Par suite : $-11\leq f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in[-2;2]$ alors : $-2\leq x\leq 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-3;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-2;2]$

Alors : $f(-2)\leq f(x)\leq f(2)$ et comme : $f(-2)=(-2)^2+6\times(-2)-2=4-12-2=-10$ et $f(2)=2^2+6\times 2-2=4+12-2=14$

Par suite : $-10\leq f(x)\leq 14$

b) Soit : $x\in[-6;-4]$ On a alors : $-6\leq x\leq -4$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-3]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-6;-4]$

Alors : $f(-4)\leq f(x)\leq f(-6)$ et comme :

$f(-4)=(-4)^2+6\times(-4)-2=16-24-2=-10$ Et $f(-6)=(-6)^2+6\times(-6)-2=36-36-2=-2$

Par suite : $-10\leq f(x)\leq -2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien