Correction : Devoir surveillé n°5/F sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $4\,pts(1\,pts \times 4)$ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :1) $f(x)=\frac{2x+|x|}{x+3}-\frac{7x^2-5}{x-3}$ 2) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^3-5x}$ 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. 4) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

Solution : 1) $f(x)=\frac{2x+|x|}{x+3}-\frac{7x^2-5}{x-3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x+3\neq 0 \;\; et\; x-3\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\neq -3 \;\; et\; x\neq 3\}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{-3;3\}$

2) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^3-5x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^3-5x\neq 0\}$

$x^3-5x=0$ Équivalent à : $x(x^2-5)=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-5=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2=5$ Équivalent à : $x=0$ ou $x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\}$

3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x+2\geq 0 \;\; et\;\; x-1\neq 0\}$

Signifie : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq -2 \;\; et\;\; x\neq 1\}$

Donc : $D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

4) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2+x+1\geq 0\}$

$a=1$ et $b=1$ et $c=1$ donc : $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=-3\prec 0$

Et puisque : $a=1\succ 0$ alors : $x^2+x+1\succ 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

Exercice 02 : $4\,pts(2\,pts+2\,pts)$

1) Etudier la parité de la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

2) Etudier la monotonie de la fonction g définie par : $g(x)=\frac{-3}{x}+1$ sur $I=]0;+\infty[$

Solutions :1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ Signifie $x^2=4$

Équivaut à : $x=\sqrt{4}=2$ ou $x=-\sqrt{4}=-2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b)☞ Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$ alors $x\neq 2$ et $x\neq -2$ alors $-x\neq -2$ et $-x\neq 2$

Donc : $-x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}$

☞ $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$ Donc f est une fonction impaire

2)Soit $x_1 \in]0;+\infty[$ et $x_2 \in]0;+\infty[$ tels que : $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

Donc : $\frac{-3}{x_1} < \frac{-3}{x_2}$ car $-3 < 0$

Donc : $\frac{-3}{x_1} + 1 < \frac{-3}{x_2} + 1$ Alors $f(x_1) < f(x_2)$

D'où f est strictement croissante sur $I =]0;+\infty[$

Exercice 03 :

$12pts(1pts + 1pts + 0,5pts + 1pts + 0,5pts + 0,5pts + 1pts + 1pts + 1pts + 1,5pts + 1pts + 1pts + 1pts)$

Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$ et $g(x) = x^2 - 2x - 1$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f et D_g

2) a) Déterminer la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de g

3) a) Déterminer la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de f

4)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

5) a) Déterminer $a; b$ et c tel que : $x \in D_f$: $g(x) - f(x) = \frac{(x+1)(ax^2+bx+c)}{4x-4}$

b) Déterminer les points d'intersections de (C_f) et (C_g)

6)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère en précisant les points d'intersections

4)a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x) > f(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \times g(x) \geq 0$

7) Soit la fonction définie par : $h(x) = |g(x)|$

Tracer La courbes représentatives (C_h) de h dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :1) a) $f(x) = \frac{5x-11}{4x-4}$; on a $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $g(x) = x^2 - 2x - 1$; g est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2)a) On a : $g(x)=x^2-2x-1$: Méthode1 : $g(x)=x^2-2x-1=x^2-2x+1-1-1=(x-1)^2-2=1(x-1)^2-2$

Donc : $g(x)=x^2-2x-1=1(x-1)^2-2$ et $g(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$; Donc $\alpha=-1$ et $\beta=-2$ et $a=1$

Méthode2 : $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-4$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times 1}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times(1)-1=-2$

Donc : $g(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=1(x-1)^2-2$

La courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $S(-\alpha;\beta)$; $S(1;-2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

b) Tableau de variations de g : On a $a=1>0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

3)a) $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$

En générale si : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre

$W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre :

$W\left(1;\frac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=1$ et $y=\frac{5}{4}$

b) Tableau de variations de f : $f(x)=\frac{5x-11}{4x-4}$ on a : $\Delta=\begin{vmatrix}5 & -11\\ 4 & -4\end{vmatrix}=-20+44=24\succ 0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]1\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 1[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	||	$\nearrow$

4)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation : $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5x-11}{4x-4}=0 \Leftrightarrow 5x-11=0 \Leftrightarrow x=\frac{11}{5}$

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $C\left(\frac{11}{5};0\right)$

b) Les points d'intersections de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0$ $\quad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-1)=4+4=8>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times 1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times 1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont $A\left(1+\sqrt{2};0\right)$ et $B\left(1-\sqrt{2};0\right)$

5) a) Soit $x\in D_f$: $g(x)-f(x)=x^2-2x-1-\frac{5x-11}{4x-4}=\frac{4x^3-12x^2-x+15}{4x-4}=\frac{(x+1)\left(4x^2-16x+15\right)}{4x-4}$

Donc : $a=4$; $b=-16$; $c=15$

b) Détermination des points d'intersections de (C_f) et (C_g) :

$M(x;y)\in(C_f)\cap(C_g) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(4x^2-16x+15)}{4x-4}=0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2-16x+15)=0 \Leftrightarrow 4x^2-16x+15=0$ ou $x=-1$

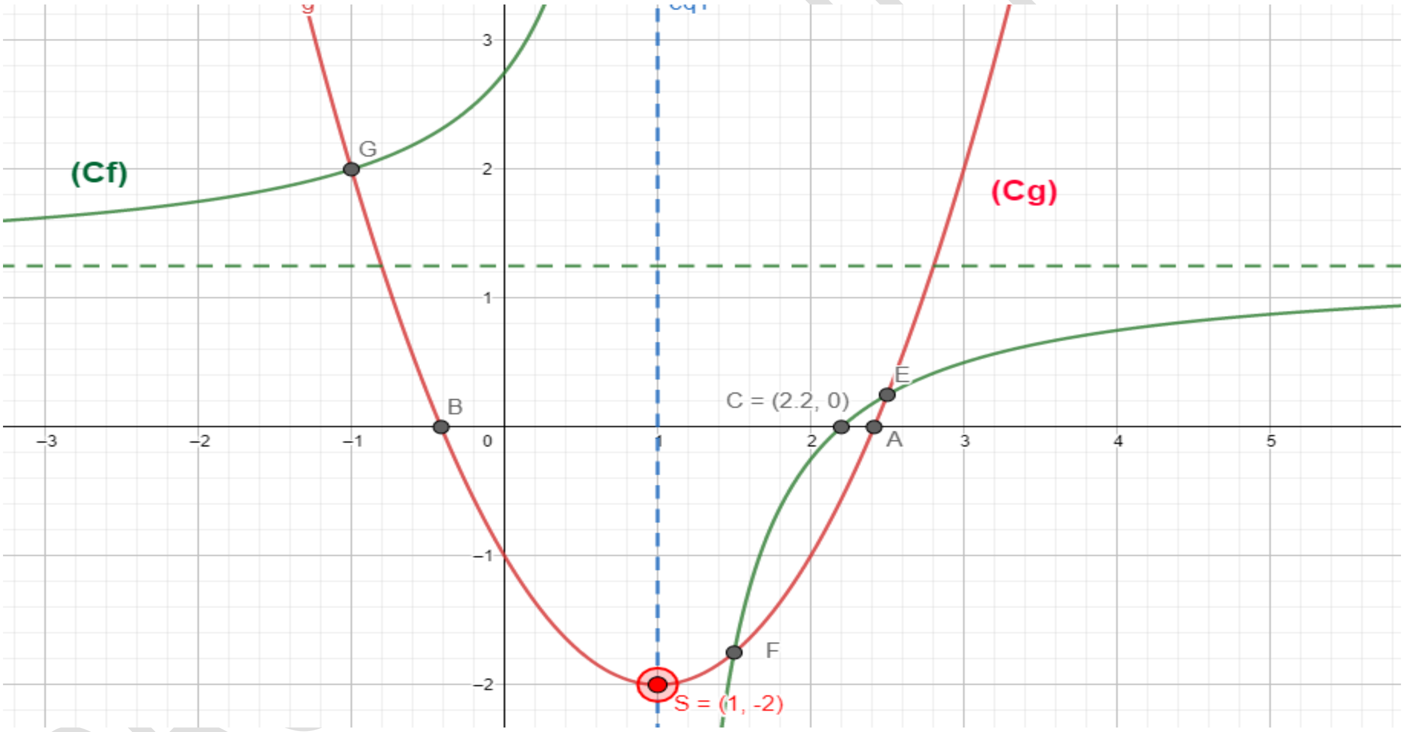
$\Delta=b^2-4ac=(-16)^2-4\times4\times15=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-16)+\sqrt{16}}{2\times4}=\dfrac{16+4}{8}=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-16)-\sqrt{16}}{2\times4}=\dfrac{16-4}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\left\{E\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{4}\right);F\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{7}{4}\right);G(-1;2)\right\}$

6)Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

a) $f(x)=\dfrac{5x-11}{4x-4}$: (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=\dfrac{5}{4}$



4)a) Résolution graphique de l'inéquation : $g(x)\succ f(x)$

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$

Donc : $S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$

4) b) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\times g(x)\geq 0$

$f(x)\times g(x)\geq0 \Leftrightarrow f(x)\geq0$ *et* $g(x)\geq0$ ou $f(x)\leq0$ *et* $g(x)\leq0$

$f(x)\geq 0 \iff$ La courbe (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses $\iff x\in \left]-\infty;1\right[\cup \left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

$g(x)\geq 0 \iff$ La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses $\iff x\in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$

$f(x)\geq 0 \ et\, g(x)\geq 0 \iff x\in \left(\left]-\infty;1\right[\cup \left[\frac{11}{5};+\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};+\infty\right[\right)$

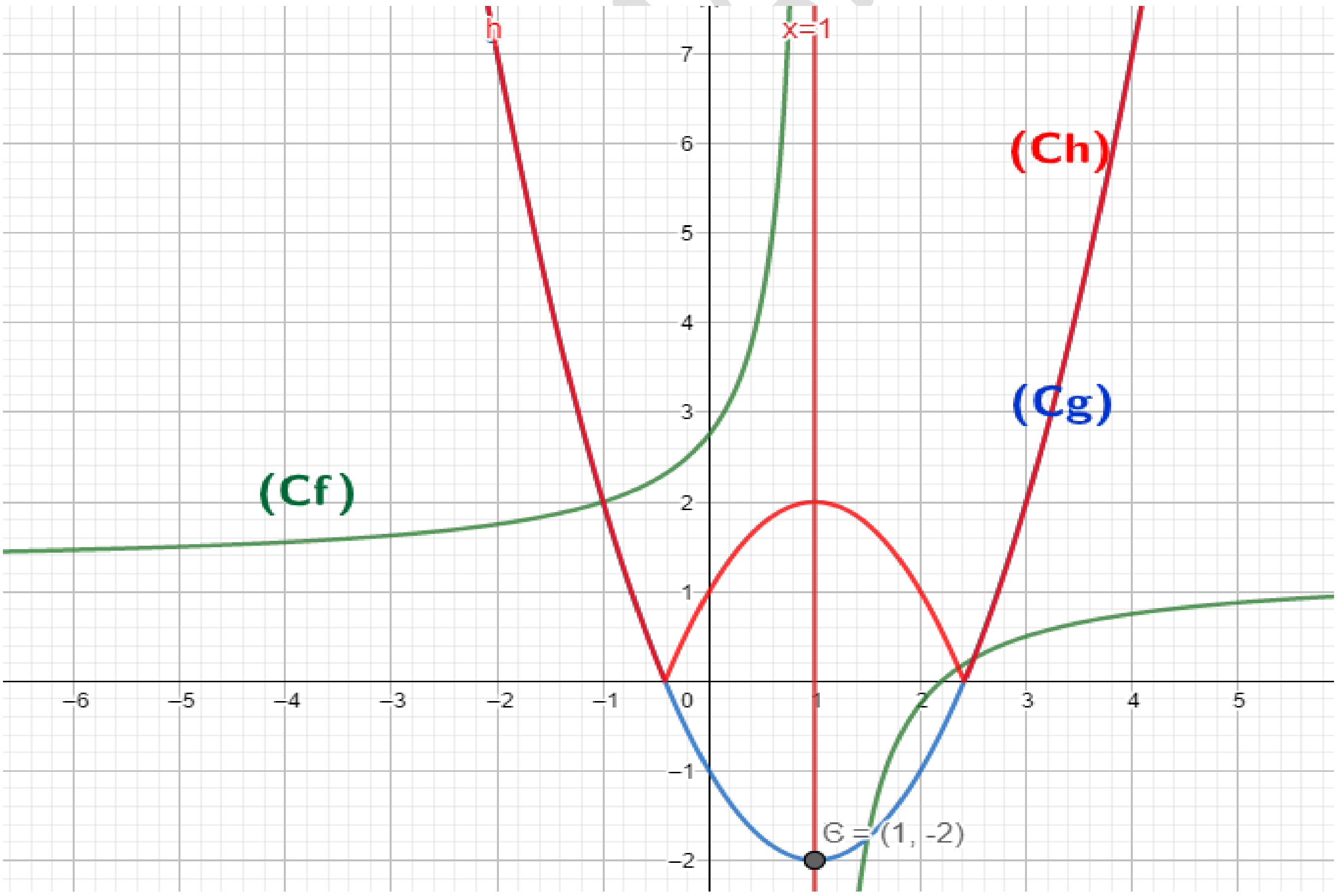
$f(x)\geq 0 \ et\, g(x)\geq 0 \iff x\in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};1\right[$

De la même façon : $f(x)\leq 0 \ et\, g(x)\leq 0 \iff x\in \left[\frac{11}{5};+\infty\right[$

Donc : $f(x)\times g(x)\geq 0 \iff x\in \left]-\infty;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[\frac{11}{5};+\infty\right[\cup \left]1;1+\sqrt{2}\right]$

5) On a : $h(x)=\left|g(x)\right|$ donc : $\begin{cases} h(x)=g(x) & si\ g(x)\geq 0 \\ h(x)=-g(x) & si\ g(x)\leq 0 \end{cases}$

Donc : Les courbes (C_h) et (C_g) sont confondues si $g(x)\geq 0$ c'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses et Les courbes (C_h) et (C_g) sont symétriques si $g(x)\leq 0$ C'est-à-dire : si La courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses (voir figure)



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien