Correction : Devoir surveillé n°5/G sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $6pts(1pts+1pts+0,5pts+1pts+1pts+1pts+0,5pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=2-\frac{5}{x^2+1}$

4) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+1}$

1 $D_f=\{x\in E / x^2+2\neq 0\}$; $x^2+2=0$ Signifie $x^2=-2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+2 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{2(-x)^2-3}{(-x)^2+1}=\frac{2x^2-3}{x^2+1}=f(x)$ donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Montrons que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=2-\frac{5}{x^2+1}$

Méthode1 : $2-\frac{5}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)-5}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-5}{x^2+1}=\frac{2x^2-3}{x^2+1}$

Donc : $2-\frac{5}{x^2+1}=f(x)$

Méthode2 : $f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-2-3}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)-5}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{5}{x^2+1}$

Donc : $f(x)=2-\frac{5}{x^2+1}$

4) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

2) soient $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$ tel que : $x_1<x_2$

$x_1<x_2$ Implique : $x_1^2<x_2^2$

Implique : $x_1^2+1<x_2^2+1$

Implique : $\frac{1}{x_2^2+1}<\frac{1}{x_1^2+1}$

Implique : $\frac{-5}{x_1^{\ 2}+1} < \frac{-5}{x_2^{\ 2}+1}$

Implique : $2-\frac{5}{x_1^{\ 2}+1} < 2-\frac{5}{x_2^{\ 2}+1}$

Implique : $f(x_1) < f(x_2)$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

6)D'après le tableau de variation de f on a : $f(0)=-3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 02 : $6,5pts(1pts+1,5pts+2pts+0.5pts+1,5pts)$

Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

1) Déterminer D_g .

2) Soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$

3) Etudier les variations de g sur les intervalles $I=]-\infty;-1[$ et $J=]-1;+\infty[$.

4) Dresser son tableau de variation de f.

5) En déduire une comparaison des nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ et $\frac{1}{2}$

Solution : $g(x)=\frac{x}{x-1}$

1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tel que : $x_1 \neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_1+x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

3) a) Sur $I=]-\infty;1[$

Soit $x_1 \in]-\infty;1[$ et $x_2 \in]-\infty;1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1<1$ et $x_2<1$ Donc $x_1-1<0$ et $x_2-1<0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1)>0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}<0$ sur $I=]-\infty;1[$

D'où : g est strictement décroissante sur $I=]-\infty;1[$

b) Sur $J=]1;+\infty[$

Soit $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc : $x_1>1$ et $x_2>1$ Donc $x_1-1>0$ et $x_2-1>0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1)>0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}<0$ sur $J=]1;+\infty[$

D'où : g est strictement décroissante sur $J=]1;+\infty[$

4) Résumé : tableau de variation **:**

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$	
g	$\searrow$	$\searrow$

5) On a $-\sqrt{2}\in]-\infty;1[$ et $-1\in]-\infty;1[$ et $-\sqrt{2}<-1$

D'après le tableau de variation de g on a : g est strictement décroissante sur : $I=]-\infty;1[$

Alors : $g\left(-\sqrt{2}\right)>g(-1)$

Donc : $\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-1}>\dfrac{-1}{-1-1}$ c'est-à-dire : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}>\dfrac{1}{2}$

Exercice03 : $7,5pts(1,5pts+0,5pts+0,5pts+1.5pts+2pts+1.5pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2-4x+3$

1)Déterminer D_f et déterminer α et β tel que : $f(x)=2(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

3) Déterminer le Tableau de variations de f

4) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=x^2-|x(x-2)|-2x+3$

a) Déterminer D_g et écrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

5)Tracer la courbe représentative de (C_g) dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

6) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$

Solution :1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=2x^2-4x+3=2\left(x^2-2x\right)+3=2\left(x^2-2\times x\times1+1^2-1^2\right)+3$

$f(x)=2\left((x-1)^2-1\right)+3=2(x-1)^2-2+3$

Donc ; $f(x)=2(x-1)^2+1$ par suite : $\alpha=-1$ et $\beta=1$ et $a=2$

2)les éléments caractéristiques de (C_f) :

La courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$.

3)Le Tableau de variations de f : On a $a=2\succ0$

Donc :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x)$	↘ 1 ↗

4) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=x^2-|x(x-2)|-2x+3$

On a : $D_g=\mathbb{R}$

Etudions le signe de : $x(x-2)$

$x(x-2)=0$ Signifie que : $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

① Si $x\in[0;2]$: $g(x)=x^2-(-x(x-2))-2x+3$

Donc : $g(x)=x^2+x(x-2)-2x+3=x^2+x^2-2x-2x+3$

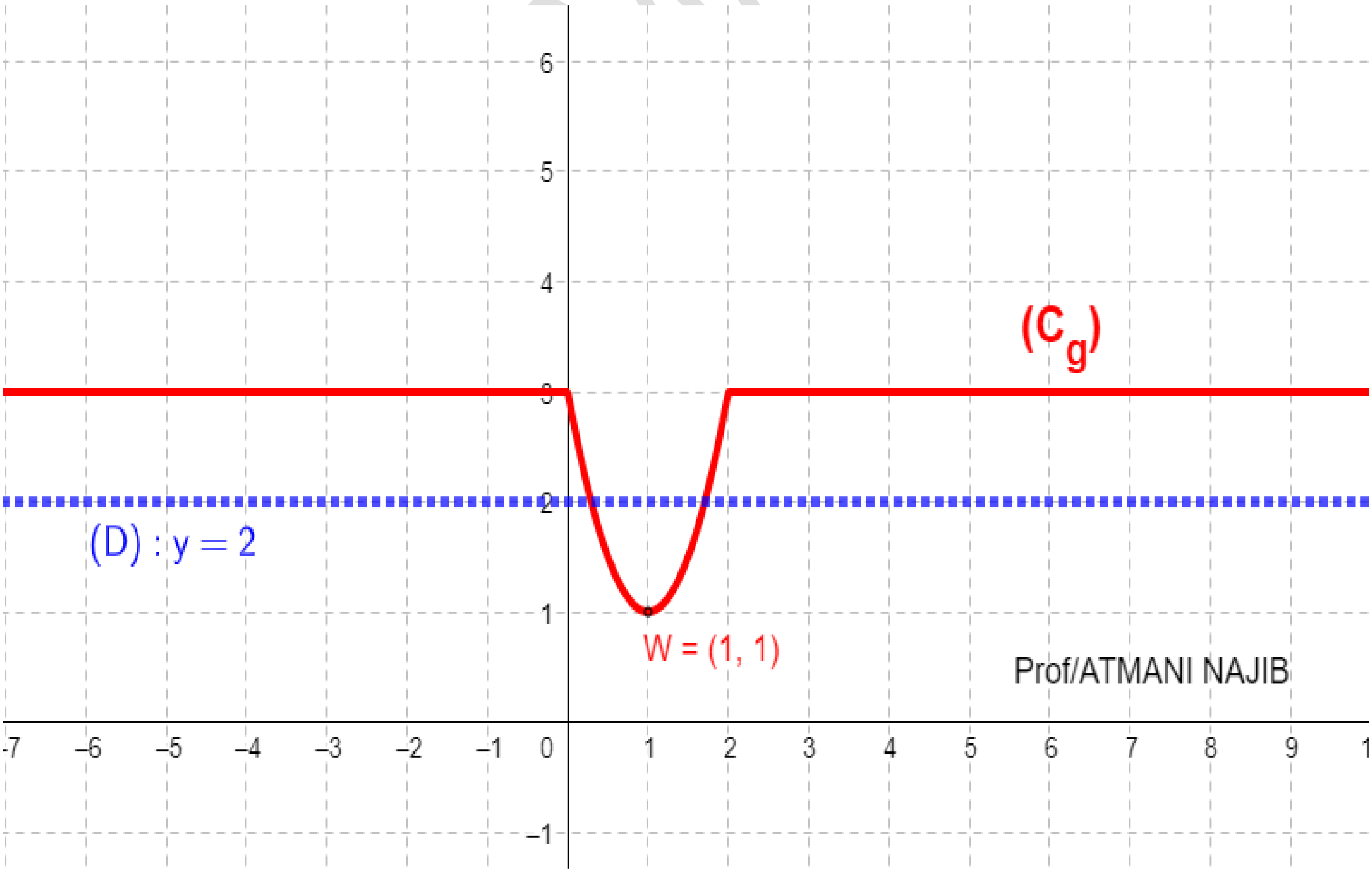
Donc : $g(x)=2x^2-4x+3$

② Si $x\geq 2$ ou $x\leq 0$: $g(x)=x^2-(x(x-2))-2x+3$

Donc : $g(x)=x^2-x(x-2)-2x+3=x^2-x^2+2x-2x+3$

Donc : $g(x)=3$ (constante)

5) Représentation graphique de la courbe représentative de (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



6) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$

$x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$ Signifie $x^2-|x(x-2)|-2x+1+2=2$

Signifie : $x^2-|x(x-2)|-2x+3=2$ Signifie : $g(x)=2$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $(D): y=2$

Puisque : la droite $(D): y=2$ coupe (C_g) en deux points alors :

L'équation : $x^2-|x(x-2)|-2x+1=0$ admet exactement 2 solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien