Correction : Devoir surveillé n°5/H sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $4,5pts(1pts+1pts+1pts+1,5pts)$

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-1)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et $\sqrt{6}$ par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-2x^2+4x+6}$ Montrer que : $f=g$

Solution : 1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x+2\geq 0 \ \ et \ \ 3-x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1 \ et \ x\leq 3\}$ Donc $D_f=[-1,3]$

b) Calcul des images :

$f(0)=\sqrt{2\times 0+2}\times\sqrt{3-0}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

et $f(-1)=\sqrt{2\times(-1)+2}\times\sqrt{3-(-1)}=\sqrt{0}\times\sqrt{4}=0$

c)

• x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à: $\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}=0$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2}=0$ ou $\sqrt{3-x}=0$

Équivaut à : $2+2x=0$ ou $3-x=0$

Équivaut à : $x=-1$ ou $x=3$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -1 et 3.

• x est l'antécédents de $\sqrt{6}$ par f signifie que $\sqrt{6}$ est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\sqrt{6}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\sqrt{6}$

Équivaut à : $\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x}=\sqrt{6}$

Équivaut à : $(2x+2)(3-x)=6$

Équivaut à : $6x-2x^2+6-2x=6$

Équivaut à : $-2x^2+4x=0$

Équivaut à : $-2x(x-2)=0$

Équivaut à : $-2x=0$ ou $x-2=0$

Équivaut à: $x=0$ ou $x=2$

Finalement les antécédents de $\sqrt{6}$ par f sont : 0 et 2

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-2x^2+4x+6}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+4x+6\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-2)\times 6=16+48=64>0$

$x_1 = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times -2} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times -2} = \frac{-12}{-4} = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2+4x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g = [-1,3]$

On a donc : $D_f = D_g$.

$f(x) = \sqrt{2x+2}\times\sqrt{3-x} = \sqrt{(2x+2)(3-x)} = \sqrt{-2x^2+6x+6-2x} = \sqrt{-2x^2+4x+6} = g(x)$

Conclusion : $f = g$

Exercice 02 : $10,5pts(0,5pts+1pts+2pts+0,5pts+0,5pts+1pts+2pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit g une fonction numérique tel que : $g(x) = -x^2+4x-1$

1)Préciser le domaine de définition de g

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3)Etudier la monotonie de g sur : $I = [2;+\infty[$ et sur $J =]-\infty;2]$

4)Dresser le tableau de variation de g

5)En déduire les extrémums de g sur $\mathbb{R}$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x-1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x) > f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solutions :1) g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(-x_1^2+4x_1-1)-(-x_2^2+4x_2-1)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{-x_1^2+x_2^2+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{-(x_1^2-x_2^2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{(x_1-x_2)(-x_1-x_2+4)}{x_1-x_2} = -x_1-x_2+4$$

Donc : $\boxed{T(x_1;x_2) = -x_1-x_2+4}$

3)a) Etude de la monotonie de g sur : $I = [2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\geq 2$ et $x_2\geq 2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>4$

Donc $-x_1-x_2<-4$ par suite : $-x_1-x_2+4<0$

Donc $T(x_1;x_2)<0$ d'où : g est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de g sur : $J =]-\infty;2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$

Alors : $x_1\leq 2$ et $x_2\leq 2$ et $x_1\neq x_2$ cela implique $x_1+x_2<4$

Donc $-x_1-x_2>-4$ par suite : $-x_1-x_2+4>0$

Donc $T(x_1;x_2)>0$

D'où : g est strictement croissante sur $]-\infty;2]$

4) <u>Résumé</u> : tableau de variation : On a :

$g(2)=-2^2+4\times2-1=-4+8-1=3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

5) $g(2)=3$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection A et B de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation: $g(x)=0$.

$g(x)=0$ Signifie $-x^2+4x-1=0$; $\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times(-1)=16-4=12>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}{-2}=2-\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{12}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times3}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{3}\right)}{-2}=2+\sqrt{3}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{3};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{3};0\right)$

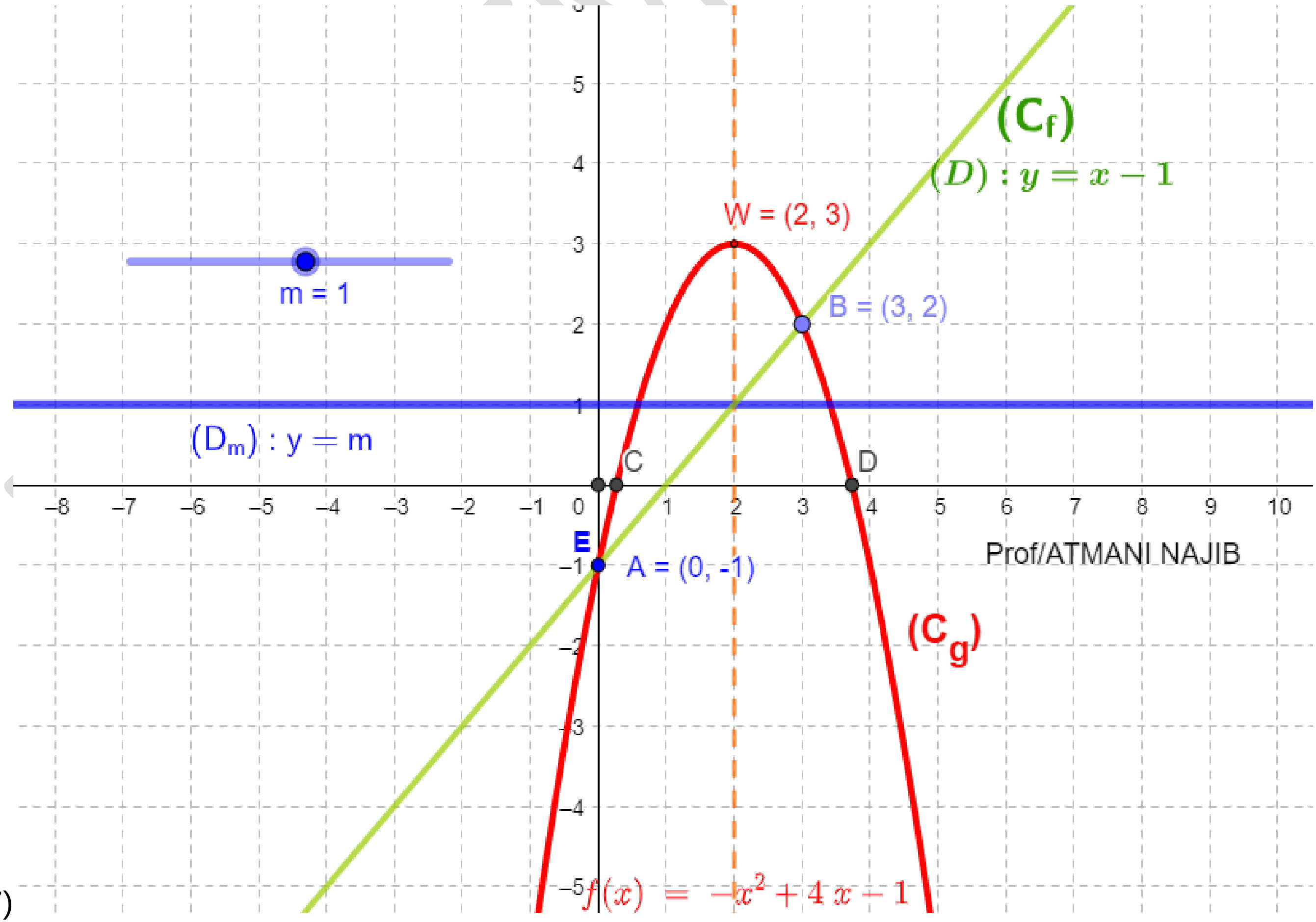
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=-0^2+4\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

7)



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=3$ donc $S=\{0;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $-x^2+4x-1=x-1$ c'est-à-dire : $-x^2+3x=0$

Signifie : $x(-x+3)=0$

Signifie : $-x+3=0$ ou $x=0$
C'est-à-dire : $x=3$ ou $x=0$
Donc : $S=\{0;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)>f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]0;3[$

Donc $S=]0;3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)>f(x)$:

$g(x)>f(x)$ Signifie $-x^2+4x-1\succ x-1$ C'est-à-dire : $-x^2+3x>0$

Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=]0;3[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2-4x+m+1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$
$x^2-4x+m+1=0$ Signifie $m=-x^2+4x-1$
Signifie : $m=g(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si : $m>3$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=3$ il y'a une solution c'est : x = 2
Si : $m<3$ il y'a deux solutions

Exercice06 : $5pts(0,5pts+1pts+1pts+0,5pts+2pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

(C_f) Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f 2) Ecrire $f(x)$ sous la forme : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de f

5) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :1) On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie : $x-1\neq 0$ équivaut à : $x\neq 1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Si $x \in \mathbb{R}-\{1\}$: la division euclidienne de : $2x+1$ par $x-1$ donne :

$$\begin{array}{rl|l} & 2x+1 & x-1 \\ \cline{3-3} & -2x+2 & 2 \\ \cline{2-2} & 3 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

Puisque : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

3) On a : $f(x)=2+\frac{3}{x-1}$ avec : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$

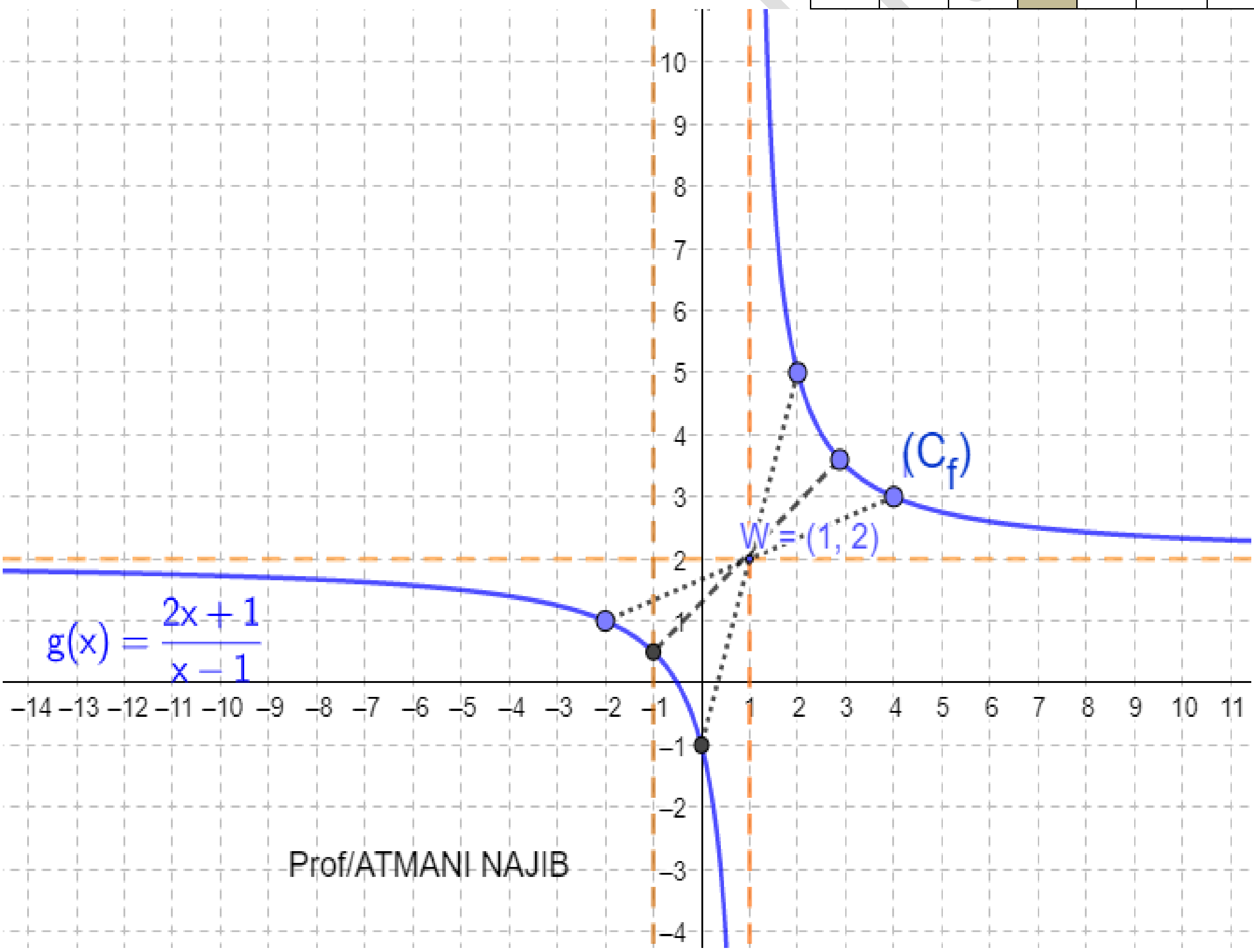
4) $k=3>0$ Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

Methode2 : $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1=-3\prec 0$

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

5)Représentation graphique :



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien