Correction : Devoir surveillé n°5/I sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $6,5pts(2pts+1,5pts+1,5pts+1pts+0,5pts)$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x-2-(x-2)^2$

1) factoriser puis Développer : $f(x)$

2) En choisissant l'expression la mieux adaptée (développée ou factorisée), calculer les images de 2 et 0 et $\sqrt{2}$ par f.

3) Montrer que : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ est un antécédent de -1 par f

4) Déterminer les antécédents de 0 par f

5) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 4)

Solution : 1) $f(x)=x-2-(x-2)^2$

Factorisation de $f(x)$: $f(x)=x-2-(x-2)^2=(x-2)[1-(x-2)]=(x-2)(-x+3)=-(x-2)(x-3)$

Donc : $f(x)=-(x-2)(x-3)$

Développement de $f(x)$: $f(x)=x-2-(x-2)^2=x-2-x^2+4x-4=-x^2+5x-6$

Donc : $f(x)=-x^2+5x-6$

2) Calcul des images :

$f(2)=-(2-2)(2-3)=0$ et $f0=-0^2+5\times0-6=-6$

$f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}^2+5\sqrt{2}-6=-2+5\sqrt{2}-6=-8+5\sqrt{2}$

3) Pour montrer que : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ est un antécédent de -1 par f il suffit de montrer que : $f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-1$?

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2+5\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)-6=-\frac{1}{4}\left(25-10\sqrt{5}+5\right)+\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)-6$$

$$f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(15-5\sqrt{5}\right)+\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)-6=\frac{-15+5\sqrt{5}+25-5\sqrt{5}-12}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Donc : $f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=-1$ par suite : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ est un antécédent de -1

4) x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à $-(x-2)(x-3)=0$

Équivaut à $x-2=0$ ou $x-3=0$

Équivaut à $x=2$ ou $x=3$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : 2 et 3.

5) Les antécédents de 0 par f sont 2 et 3.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A(2;0)$ et $B(3;0)$

Exercice02 :

$13,5pts(0,5pts+1,5pts+1pts+1pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+1,5pts+2pts+1pts+1,5pts+1,5pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+2x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+2$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $0\leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$ On a : $0\leq f(x)\leq 16$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $1\leq f(x)\leq 16$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=x+3$

Tracer Les courbes représentatives de(C_f)et(C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=x^2+2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+2x_2+1)-(x_1^2+2x_1+1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+2x_2+1-x_1^2-2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^2-x_1^2+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{x_2-x_1}$$

Par suite :$T(x_1;x_2)=x_1+x_2+2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-1;+\infty[$ et $x_2\in[-1;+\infty[$ alors : $x_1\geq -1$ et $x_2\geq -1$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-2$

Par suite : $x_1+x_2+2>0$.

Donc $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-1]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-1]$ et $x_2\in]-\infty;-1]$ alors : $x_1\leq -1$ et $x_2\leq -1$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique $x_1+x_2<-2$

Par suite : $x_1+x_2+2<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+1=1-2+1=0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1)=0$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-1)\le f(x)$

Par suite : $0\le f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in[-1;3]$ alors : $-1\le x\le 3$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;3]$

Alors : $f(-1)\le f(x)\le f(3)$ et comme : $f(-1)=0$ et $f(3)=3^2+2\times 3+1=9+6+1=16$

Par suite : $0\le f(x)\le 16$

b) Soit : $x\in[-5;-2]$ On a alors : $-5\le x\le -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2)\le f(x)\le f(-5)$ et comme :

$f(-5)=(-5)^2+2\times(-5)+1=25-10+1=16$ Et $f(-2)=(-2)^2+2\times(-2)+1=4-4+1=1$

Par suite : $1\le f(x)\le 16$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2+2x+1=0$

Signifie : $(x+1)^2=0$

Signifie : $x+1=0$ c'est-à-dire : $x=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(-1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

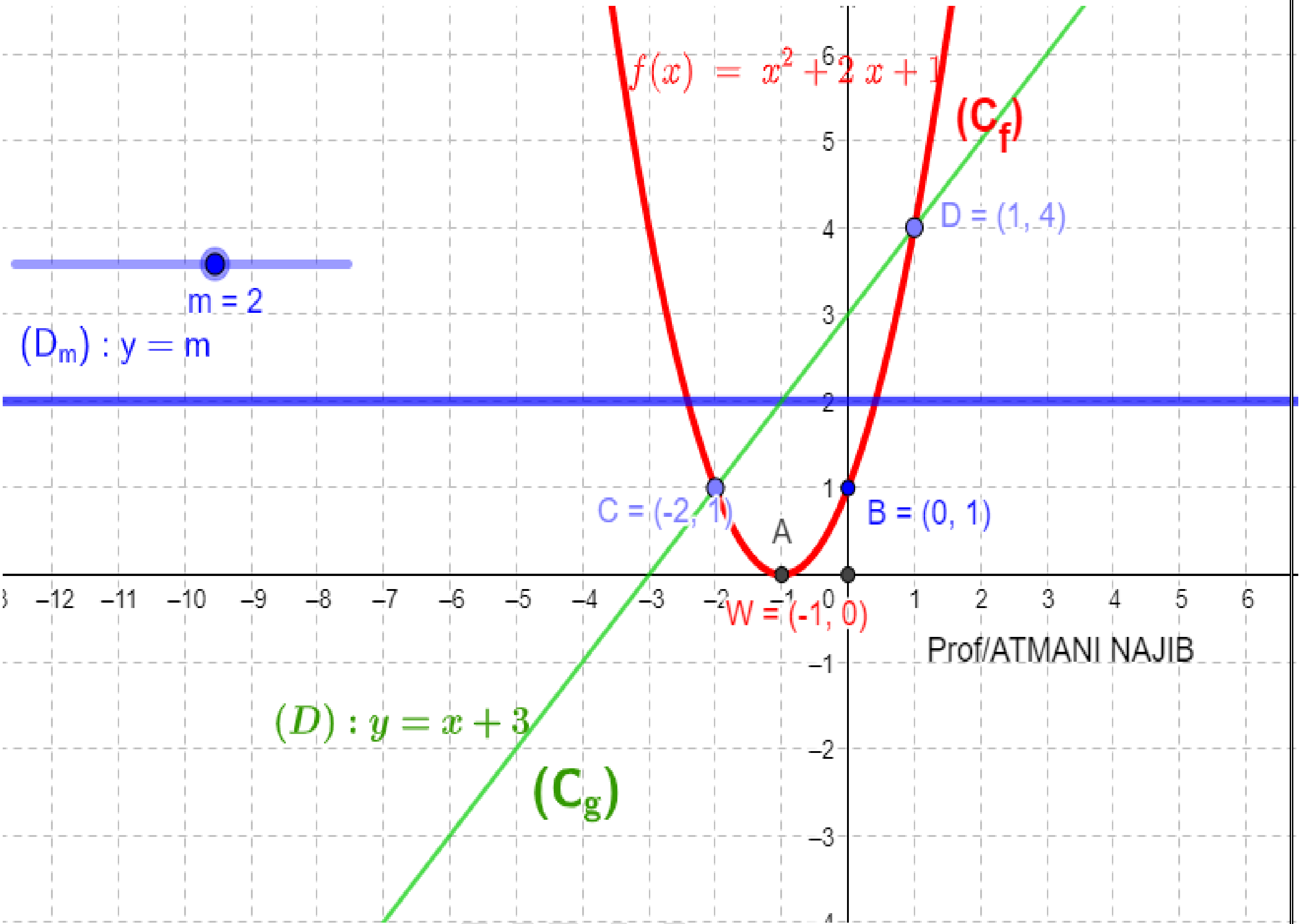
Et on a $f(0)=0^2+2\times 0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	1	**2**
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	**-2**	1
g(x)	1	4



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 1$ donc $S = \{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $x^2 + 2x + 1 = x + 3$ c'est-à-dire : $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $S = \{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) < f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessous de (C_f) si $x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) < f(x)$:

$g(x) < f(x)$ Signifie $x + 3 < x^2 + 2x + 1$

C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 > 0$

Les racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$-x^2-2x+m-1=0$ Signifie $m=x^2+2x+1$

Signifie : $m=f\left(x\right)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $\left(C_f\right)$ et la droite : $y=m$

Si : $m<0$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=0$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m>0$ il y'a deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien