Correction : Devoir surveillé n°5 /J sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $3pts(1,5pts+1pts+0,5pts)$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=3x^2-1$

1) Calculer les images de 1 ; $\sqrt{2}$ et -1 par f.
2) a) Déterminer les antécédents de 0 par f
b) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 2) a)

Solution : 1) Calcul des images : $f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$ et $f(\sqrt{2})=3\times(\sqrt{2})^2-1=6-1=4$

$f(-1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

2) a) Déterminons les antécédents de 0 par f

x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Équivaut à : $3\times x^2-1=0$ Équivaut à : $3\times x^2=1$ équivaut à : $x^2=\frac{1}{3}$

Équivaut à : $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Finalement les antécédents de 0 par f sont $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Les antécédents éventuels de 0 par f sont : $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points : $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$

Exercice02 : $3,5pts(1pts+1pts+1pts+0,5pts)$

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\frac{\sqrt{2x-12}}{x^2-8x}$ 2) $f(x)=\sqrt{1-|2x-4|}$ 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-3}{x^6-28x^3+27}$ 4) $f(x)=\frac{5x-1}{x^2+2}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{\sqrt{2x-12}}{x^2-8x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-12\geq0 \;\; et \;\; x^2-8x\neq0\}$

$2x-12\geq0$ Signifie : $x\geq6$

$x^2-8x\neq0$ Signifie : $x(x-8)\neq0$ c'est-à-dire : $x\neq0$ et $x\neq8$

Donc : $D_f=[6,+\infty[-\{0;8\}=[6,8[\cup]8,+\infty[$

2) $f(x)=\sqrt{1-|2x-4|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-|2x-4|\geq0\}$

$1-|2x-4|\geq0$ Signifie que : $|2x-4|\leq1$ Signifie que : $-1\leq2x-4\leq1$

Signifie que : $-1+4\leq2x-4+4\leq1+4$

Signifie que : $3\leq2x\leq5$

Signifie que : $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

Donc : $D_f = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-3}{x^6 - 28x^3 + 27}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^6 - 28x^3 + 27 \ne 0 \quad et \quad x - 2 \ge 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^6 - 28x^3 + 27 \ne 0 \quad et \quad x \ge 2\}$

$x^6 - 28x^3 + 27 = 0$ Signifie que : $\left(x^3\right)^2 - 28\left(x^3\right) + 27 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^3$; nous obtenons l'équation : $X^2 - 28X + 27 = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4\times1\times27 = 676 = 26^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$X_1 = \frac{28-26}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{28+26}{2} = \frac{54}{2} = 27$

Donc : $x^3 = 1$ ou $x^3 = 27$ équivalent à : $x = 1$ ou $x = 3$

Par suite : $D_f = [2;+\infty[- \{1;3\} = [2;+\infty[- \{3\} = [2;3[\cup]3;+\infty[$

4) $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+2}$: $D_f = \{x \in E / x^2 + 2 \ne 0\}$

$x^2 + 1 = 0$ Signifie $x^2 = -2$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $x^2 + 2$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

Exercice03 : $3,5pts(1pts + 2pts + 0,5pts)$

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3}{|x+2| - |x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f
3) Donner une interprétation graphique

Solution :1) $f(x) = \frac{x^3}{|x+2| - |x-2|}$. $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x+2| - |x-2| \ne 0\}$

$|x+2| - |x-2| = 0$ Signifie $|x+2| = |x-2|$ C'est-à-dire : $x + 2 = x - 2$ ou $x + 2 = -(x-2)$

Signifie $2 = -2$ ou $2x = 0$

C'est-à-dire : $2 = -2$ (pas de solution) ou $x = 0$

Signifie : $x = 0$ Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

2)Etude de la parité de la fonction f

☞Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$ alors $-x \in \mathbb{R}^*$

☞ $f(-x) = \frac{(-x)^3}{|-x+2| - |-x-2|} = \frac{-x^3}{|-(x-2)| - |-(x+2)|} = \frac{-x^3}{|x-2| - |x+2|}$ Car $|-x| = |x|$

$f(-x) = \frac{-x^3}{-(-|x-2| + |x+2|)} = \frac{x^3}{-|x-2| + |x+2|} = \frac{x^3}{|x+2| - |x-2|}$

Donc : $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,
3)Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative

Exercice04 : $10pts(0,5pts+1,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts+1.5pts+0,5pts+1pts+0,5pts+1pts+1,5pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que $x_1 \neq x_2$

3) Dresser son tableau de variation de f

4) Montrer que : $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in D_f$

5) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer son centre et ses asymptotes

6) Tracer la courbe (C_f)

7) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{|x|-1}$

a) Déterminer D_g

b) Montrer que : g est impaire

c) Montrer que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

d) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g et tracer (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Soients $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1x_2-x_1-x_1x_2+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-x_1+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

3) Tableau de variation : a) sur $]1;+\infty[$ soients $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ 1$ et $x_2\succ 1$ Donc $x_1-1\succ 0$ et $x_2-1\succ 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}\leq 0$ sur $]1;+\infty[$

D'où f est décroissante sur $]1;+\infty[$

b) Sur $]-\infty;1[$ soients $x_1\in]-\infty;1[$ et $x_2\in]-\infty;1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1 \prec 1$ et $x_2 \prec 1$ Donc $x_1 - 1 \prec 0$ et $x_2 - 1 \prec 0$ Donc $(x_1-1)(x_2-1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)} \leq 0$ sur $]-\infty;1[$ D'où f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$

<u>Résumé</u> : tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

4) Montrons que : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a : $1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1}$

Donc : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

5)<u>Méthode1</u> $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$; Puisque : $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ et $k = 1 > 0$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $y = 1$

<u>Méthode2</u> :☹(changement de repére)

l'équation de (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est : $y = f(x)$

Signifie : $y = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ donc : $y - 1 = \dfrac{1}{x-1}$ On pose : $Y = y - 1$ et $X = x - 1$

L'équation de (C_f) devient : $Y = \dfrac{1}{X}$ dans le repère $(W;\vec{i};\vec{j})$ avec $W(1;1)$

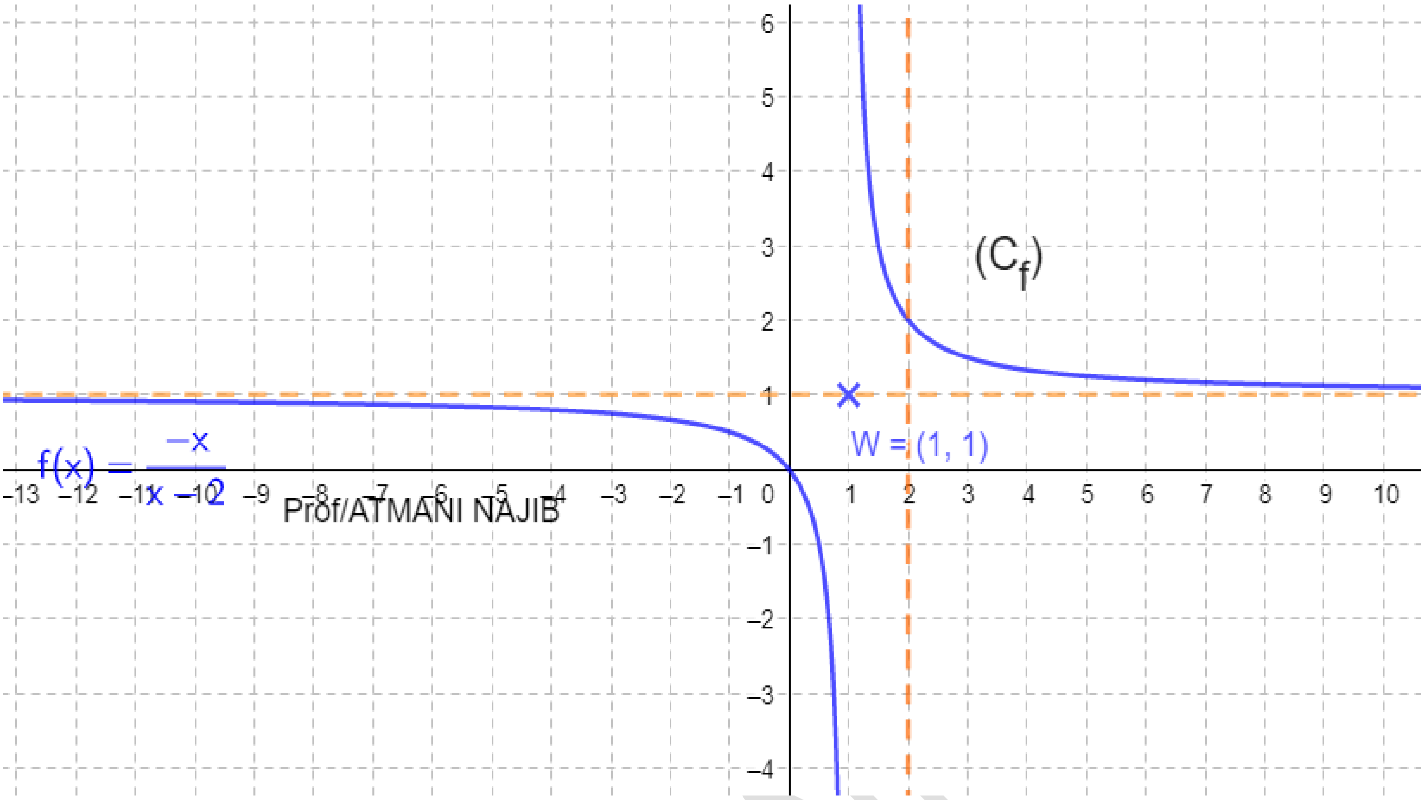
Donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$

<u>Méthode3 :</u>☹(on utilisant un résumé de notre cours)

Si : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $W\left(\dfrac{1}{1};\dfrac{1}{1}\right)$ c'est à dire : $W(1;1)$ d'asymptotes les droites d'équations : $x = \dfrac{1}{1} = 1$ et $y = \dfrac{1}{1} = 1$

6) La courbe (C_f) :



7) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-1\neq 0$

Signifie $|x|\neq 1$ c'est-à-dire : $x\neq 1$ et $x\neq -1$

Par suite : $D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

b) Montrons que g est impaire :

☞ $x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ Signifie $x\neq 1$ et $x\neq -1$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq 1$

Signifie $-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\dfrac{-x}{|-x|-1}=\dfrac{-x}{|x|-1}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $g(-x)=-\dfrac{x}{|x|-1}=-g(x)$ par suite : g est impaire

c) Montrons que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

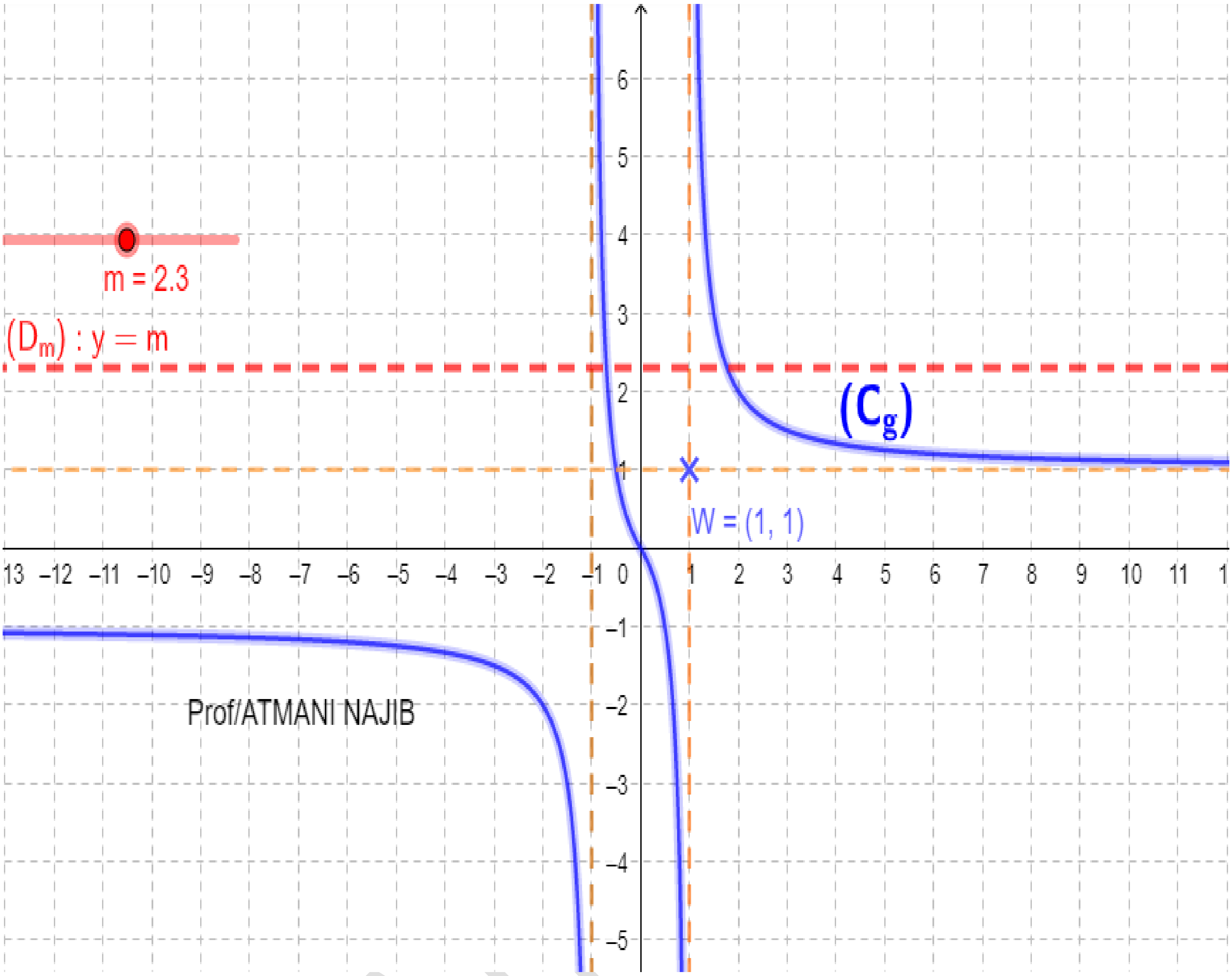
Donc : $|x|=x$ par suite : $g(x)=\dfrac{x}{|x|-1}=\dfrac{x}{x-1}=f(x)$

d) On a : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$

Donc : $(C_g)=(C_f)$ sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$

Et puisque g est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

d) La courbe représentative de (C_f) et de (C_g) :



e) Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x - m|x| + m = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$

$x - m|x| + m = 0$ Signifie $x = m|x| - m$

Signifie $x = m(|x| - 1)$

Signifie $m = \dfrac{x}{|x| - 1} = g(x)$

Signifie $g(x) = m$

Donc : le nombre de solutions de l'équation est le nombre de points d'intersections de (C_g) et la droite : $y = m$

Si : $-1 \leq m \leq 1$ il y'a une seule solution

Si : $m \succ 1$ ou $m \prec 1$ il y'a deux solutions

Exercice02 : $3,5pts(2pts + 1,5pts)$

Exercice03 : $11pts(0,5pts + 1,5pts + 2pts + 0,5pts$

Exercice04 : $(1,5pts)$ Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$

C’est en forgeant que l’on devient forgeron : Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien