Correction : Devoir surveillé n°5 /K sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $4pts(1,5pts+1pts+1,5pts)$

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{\left|-5x^2+2\right|}{2x^2-x-6}$ 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{6\left|x+5\right|+2}$ 3) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

Solution :1) $f(x)=\dfrac{\left|-5x^2+2\right|}{2x^2-x-6}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-6\neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};2\right\}$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{6\left|x+5\right|+2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/6\left|x+5\right|+2\neq 0 \ \ et \ x\geq 0\right\}$

On a : $\left|x+5\right|\geq 0$ donc : $6\left|x+5\right|\geq 0$ donc : $6\left|x+5\right|+2\geq 2>0$

Donc : $6\left|x+5\right|+2\neq 0$

Par suite : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\right\}$

Par suite : $D_f=[0,+\infty[$

7) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1>0\right\}$

$2x^2-3x+1$ Calculons son discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1

Donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\dfrac{5+\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Exercice02 : $(1,5pts)$ Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$

Montrer que 1 est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Solutions : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$ $D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$

Donc $-4x^2\leq 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\leq 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

D'où : $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

Exercice03 : $5,5pts(0,5pts+1pts+0,5pts+1,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=3x^2+2$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Donner une interprétation graphique de ce résultat

4) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f Entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

5) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

6) Dresser le tableau de variation de f

Solution : 1) f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=3(-x)^2+2=3x^2+2=f(x)$ C'est à dire : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Une interprétation graphique : puisque f est une fonction paire alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie a la courbe de f .

4) soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(3x_1^2+2)-(3x_2^2+2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3x_1^2-3x_2^2+2-2}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=3(x_1+x_2)$$

5) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ et $x_1\neq x_2$ implique $x_1+x_2\succ 0$ Donc $3(x_1+x_2)\succ 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

6) <u>Résumé</u> : tableau de variation **:** $f(0)=3\times 0^2+2=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Exercice 04 : $9\,pts(0,5\,pts+1\,pts+0,5\,pts+0,5\,pts+1\,pts+1\,pts+0,5\,pts+2\,pts+2\,pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

A)1) Déterminer D_f

2) Mettre : $f(x)$ sous la forme canonique (déterminations de α et β tel que : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Déterminer le Tableau de variations de g

B) On considère la fonction numérique g tel que : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$ et (C_g) sa courbe représentative

1) Etudier la parité de g

2) que peut-on dire de la fonction f et de g sur $\mathbb{R}^+$

3) Dresser le Tableau de variations de g

4) Tracer les courbes représentative (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $g(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : A) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$

1)On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3=\frac{1}{2}(x^2-4x)+3=\frac{1}{2}\left((x-2)^2-4\right)+3=\frac{1}{2}(x-2)^2-2+3=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$

Donc : $g(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ et si : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Alors : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $a=\frac{1}{2}$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a : $a=\frac{1}{2}$ et $b=-2$ et $c=3$

Donc : $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)}=-2$ et $\beta=f(-\alpha)=f(2)=\frac{1}{2}2^2-2\times 2+3=1$

Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$

3) Donc dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ c'est à dire $W(2;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

4)Tableau de variations de f

On a $a=\frac{1}{2}>0$ donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

B) $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$

1) Etudions la parité de g

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

b) $g(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2-2|-x|+3=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3=g(x)$

Donc : g est une fonction paire

Graphiquement (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3=\frac{1}{2}x^2-2x+3=f(x)$ car $|x|=x$

Résultat : (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$

3) Tableau de variations de g :

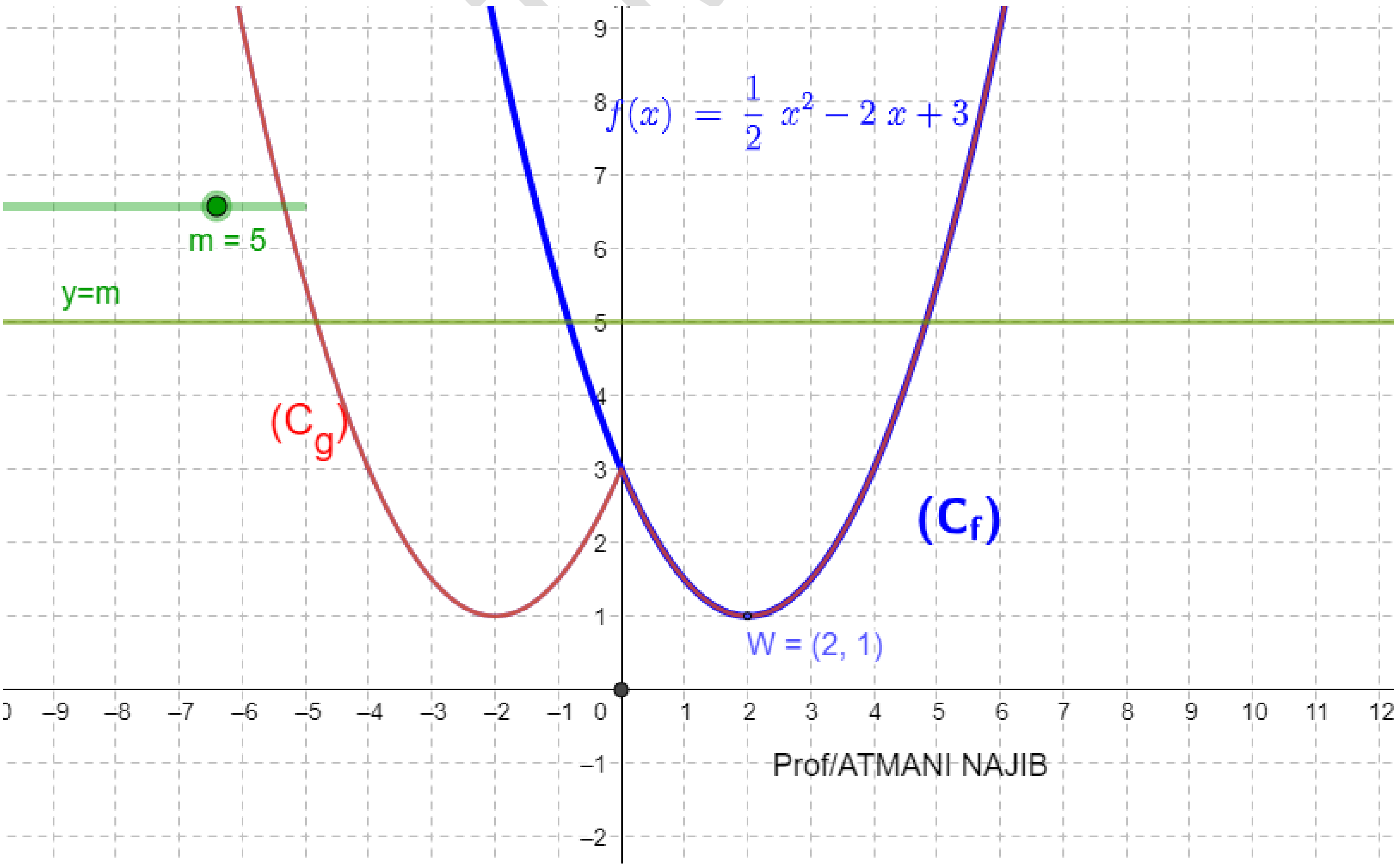
Du Tableau de variations de f et puisque g est paire on déduit le Tableau de variations de g :

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$g(0)=3$ et $g(-2)=1$ et $g(2)=1$

Puisque (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$ et (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

4)Alors on peut construire (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) Résolution graphique de l'équation $m = g(x)$ avec $m \in \mathbb{R}$:

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y = m$

Si: $m < 1$ il y'a pas de solution
Si: $m = 1$ il y'a deux solutions : 2 et -2
Si: $1 < m < 3$ il y'a une 4 solutions
Si: $m = 3$ il y'a trois solutions : 4 ;0 ;-4
Si: $m > 3$ il y'a deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien