Correction : Devoir surveillé n°5 /L sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $4,5pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts)$

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{7x-3}{2x^2-3x+\frac{9}{8}}$ 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x-5}{x+2}}$ 3) $f(x)=\dfrac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{7x-3}{2x^2-3x+\frac{9}{8}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+\dfrac{9}{8}\neq 0\right\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\dfrac{9}{8}$

Donc :Δ = b² – 4ac = (-3)² – 4 x 2 x $\dfrac{9}{8}$ = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-3}{2\times 2}=\dfrac{3}{4}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x-5}{x+2}}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0 \;\; et \;\; \dfrac{-x-5}{x+2}\geq 0\right\}$

$-x-5=0$ Équivaut à : $x=-5$ et $x+2=0$ qui signifie que : $x=-2$

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x-5}{x+2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc : $D_f=[-5,-2[$

3) $f(x)=\dfrac{-2\sqrt{3-4x}+6}{2x^2-3x+1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\neq 0 \;\; et \;\; 3-4x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\neq 0 \;\; et \;\; x\leq\dfrac{3}{4}\right\}$

$2x^2-3x+1=0$: Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc :

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x\neq\frac{1}{2}\ et\ x\neq 1\ et\ x\leq\frac{3}{4}\right\}$

$D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$

Exercice02 : $4,5pts(0,5pts+1pts+0,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{-2x^2-3}{x^2+4}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=-2+\frac{5}{x^2+4}$

4) a) Etudier la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$

5) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer les extrémums de f

Solution : $f(x)=\frac{-2x^2-3}{x^2+4}$

1 $D_f=\{x\in E / x^2+4\neq 0\}$

$x^2+4=0$ Signifie $x^2=-4$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+4 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Etudions la parité de la fonction f :

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{-2(-x)^2-3}{(-x)^2+4}=\frac{-2x^2-3}{x^2+4}=f(x)$ Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc : f est une fonction paire,

3) Montrons que : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=-2+\frac{5}{x^2+4}$

Méthode1 : $-2+\frac{5}{x^2+4}=\frac{-2(x^2+4)+5}{x^2+4}=\frac{-2x^2-8+5}{x^2+4}=\frac{-2x^2-3}{x^2+4}$

Donc : $f(x)=-2+\frac{5}{x^2+4}$

Méthode2 : $f(x)=\frac{-2x^2-3}{x^2+4}=\frac{-2x^2-8+8-3}{x^2+4}=\frac{-2(x^2+4)+5}{x^2+4}=\frac{-2(x^2+4)}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+4}$

Donc : $f(x)=-2+\frac{5}{x^2+4}$

4) a) Etudions la monotonie de f sur l'intervalles $[0;+\infty[$

2) soient $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$ tel que : $x_1<x_2$

$x_1<x_2$ Implique : $x_1^2<x_2^2$

Implique : $x_1^2+4<x_2^2+4$

Implique : $\frac{1}{x_2^2+4}<\frac{1}{x_1^2+4}$

Implique : $\frac{5}{x_2^2+1}<\frac{-5}{x_1^2+1}$

Implique : $-2+\frac{5}{x_2^2+1}<-2+\frac{-5}{x_1^2+1}$

Implique : $f(x_2)<f(x_1)$

D'où : f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b) Déduction des variations de f sur $]-\infty;0]$:

Puisque f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et f est une fonction paire et le symétrique de $[0;+\infty[$ est $]-\infty;0]$

Alors : f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-3/4$	$\nearrow$

6)D'après le tableau de variation de f on a : $f(0)=-\frac{3}{4}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice03 : $11pts(0,5pts+1,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts+1pts+2pts+2pts+2pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+4x+3$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

3) Etudier la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

6) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7) Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9)Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)>g(x)$

Solution : $f(x)=-x^2+4x+3$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2^2+4x_2+3)-(-x_1^2+4x_1+3)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2^2+4x_2+3+x_1^2-4x_1-3}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_2^2+x_1^2+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2^2-x_1^2)+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{-(x_2-x_1)(x_2+x_1)+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)(-(x_2+x_1)+4)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2) = -(x_1+x_2)+4$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$

Soient : $x_1 \in [2;+\infty[$ et $x_2 \in [2;+\infty[$ alors $x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2$ implique $x_1+x_2 \geq 4$

Donc $-(x_1+x_2) \leq -4$ par suite : $-(x_1+x_2)+4 \leq 0$

Donc $T(x_1;x_2) \leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I=[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;2]$

Soient : $x_1 \in]-\infty;2]$ et $x_2 \in]-\infty;2]$ alors : $x_1 \leq 2$ et $x_2 \leq 2$ cela implique $x_1+x_2 \leq 4$

Donc $-(x_1+x_2) \geq -4$ par suite : $-(x_1+x_2)+4 \geq 0$ Donc $T(x_1;x_2) \geq 0$

D'où : f est croissante sur $J=]-\infty;2]$

4) Tableau de variation : On a : $f(2) = -2^2+4\times 2+3 = -4+8+3 = 7$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$

5) $f(2)=7$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2+4x+3=0$; $\Delta = b^2-4ac = 16-4\times(-1)\times 3 = 16+12 = 28 > 0$

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{28}}{2\times(-1)} = \frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2} = \frac{-4+2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2\left(2-\sqrt{7}\right)}{-2} = 2-\sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{28}}{2\times(-1)} = \frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2} = \frac{-4-2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2\left(2+\sqrt{7}\right)}{-2} = 2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{7};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{7};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

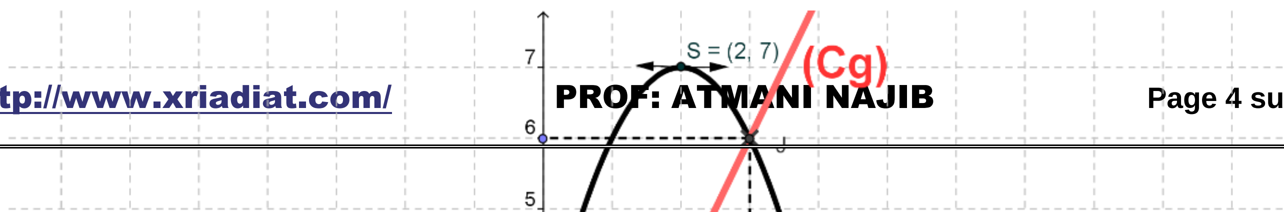
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0) = -0^2+4\times 0+3 = 3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

7) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :

-1	**0**	**1**	**2**	**3**	4	**5**
-2	3	6	7	6	3	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$

On a donc $x=-1$ et $x=3$ donc $S=\{-1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

$f\left(x\right)=g\left(x\right)$ Signifie : $-x^2+4x+3=2x$ c'est-à-dire : $-x^2+2x+3=0$ $a=-1$ et $b=2$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-1)\times3=4+12=16>0$ Donc : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{-2+4}{-2}=\frac{2}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{-2-4}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$

Donc : $S=\{-1;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)>g(x)$:

La courbe $\left(C_f\right)$ est au-dessus de $\left(C_g\right)$ si $x\in\left]-1;3\right[$

Donc $S=\left]-1;3\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)>g(x)$: $f(x)>g(x)$ Signifie $-x^2+4x+3>2x$

C'est-à-dire : $-x^2+2x+3>0$

Les racines sont : $x_1=-1$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left]-1;3\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien