Correction : Devoir surveillé n°5/M sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice 01 : $4pts(1pts+1,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f 2) a) Démontrer que : $f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

b) Est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que : $0<f(x)$ si $x\in\mathbb{R}$

b) Est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-3=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-3=\frac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$

Donc $f(x)-3=\frac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$ par suite $f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(0)=3$ donc $f(x)\leq f(0)$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

3) a) soit $x\in\mathbb{R}$; $f(x)-2=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\frac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$

Donc $f(x)-2=\frac{1}{x^2+1}>0$ par suite : $0<f(x)$ si $x\in\mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(x)>2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

Conclusion : $2\prec f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

Puisque : $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x\in]1;+\infty[$ alors $\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de

Exercice02 : $16pts(0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts$
$;1pts+1pts+2pts+1pts+1pts+0,5pts+1pts+0,5pts+1pts+0,5pts+2pts+1pts)$

On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=\frac{3x-3}{x+1}$ et (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x)=(x-1)^2$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g(x)=3-\frac{6}{x+1}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de f

4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de g
5)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère
6)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère
7)Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$
8) Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)
9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq g(x)$
10)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h
b) Montrer que la fonction h est paire
c)Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$
11)Tracer la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$
12)Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$
a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé$(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Solution : 1) $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=\frac{3x-3}{x+1}$
Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle : Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x)=(x-1)^2$ si $x\in\mathbb{R}$
$f(x)=x^2-2x+1=x^2-2x+1^2=x^2-2\times x\times 1+1^2$
Donc : $f(x)=(x-1)^2+0$ (la forme canonique)
b) Vérifions que : $g(x)=3-\frac{6}{x+1}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$; $3-\frac{6}{x+1}=\frac{3(x+1)-6}{x+1}=\frac{3x+3-6}{x+1}=\frac{3x-3}{x+1}=g(x)$(La forme réduite)

3) $f(x)=x^2-2x+1$: $(f(x)=ax^2+bx+c)$

a) <u>Méthode1 :</u> On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=1$ $f(x)=x^2-2x+1$
$\alpha=\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times 1}=-1$ et $\beta=f(-\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times 1+1=0$
Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe(C_f) c'est une parabole de sommet : $W(-\alpha;\beta)$ soit
$W(1;0)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$
<u>Méthode2 :</u> On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x)=(x-1)^2+0$ si $x\in\mathbb{R}$: $\alpha=-1$ et $\beta=0$

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ c'est-à-dire :

$W(1;0)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-\alpha=1$

b) Le tableau de variations de f :

Dans notre exercice on a : $\alpha=-1$ et $\beta=0$

$a=1>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4) $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

a) <u>Méthode1 :</u>On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=3-\dfrac{6}{x+1}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ donc : $\alpha=1$ et $\beta=3$ et $k=-6<0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-1;3)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-1$ et $y=3$

Et puisque : $k=-6<0$ alors : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

<u>Méthode2 :</u> (On utilisant un résumé de notre cours)

Si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$ Avec : $a=3$; $b=-3$; $c=1$; $d=1$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-1;3)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\dfrac{1}{1}=-1$ et $y=\dfrac{3}{1}=3$ et $\det g=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-(-3)\times 1=6>0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$	
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

5)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

$f(x)=x^2-2x+1$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x-1=0$ Signifie : $(x-1)^2=0$ Signifie : $x-1=0$ Signifie : $x=1$

Donc : le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(1,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{B(0,1)\}$

6)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

$g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie : $\dfrac{3x-3}{x+1}=0$ et $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie : $3x-3=0$

Signifie : $x=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{A(1;0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a : $g(0)=\dfrac{3\times0-3}{0+1}=\dfrac{-3}{1}=-3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;-3)$

Donc : $(C_g)\cap(oy)=\{C(0;-3)\}$

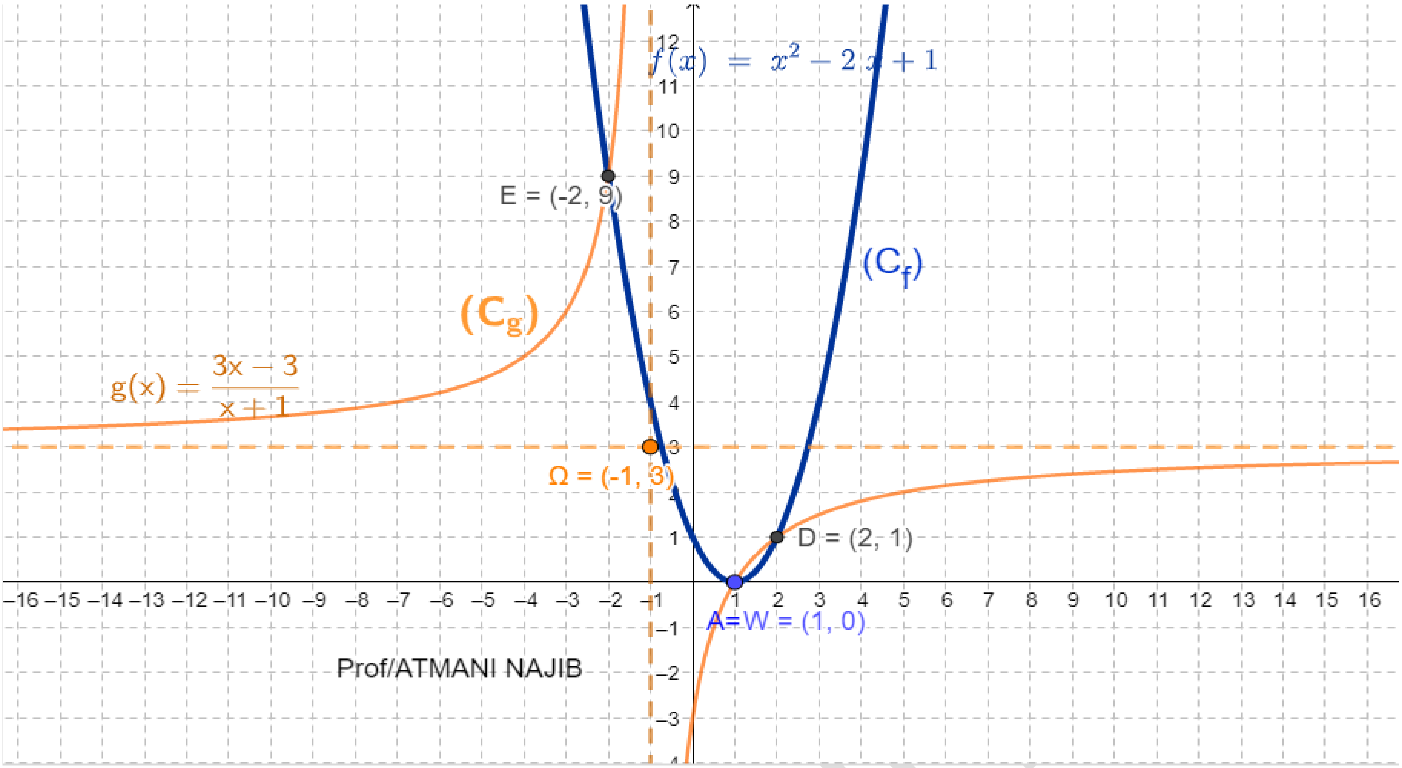
7)Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

La courbe (C_g) : $g(x)=\dfrac{3x-3}{x+1}$

-4	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	1	2
5	6	9		-3	0	1

La courbe (C_f) : $f(x)=x^2-2x+1$

x	1	2	3
$f(x)$	0	1	4



8) Déterminons algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{-1\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x+1=\dfrac{3x-3}{x+1}$

Signifie que : $(x-1)^2-\dfrac{3(x-1)}{x+1}=0$

Signifie que : $(x-1)\left(x-1-\dfrac{3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{(x-1)(x+1)-3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{x^2-1-3}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{x^2-4}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $(x-1)\left(\dfrac{x^2-2^2}{x+1}\right)=0$

Signifie que : $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)}{x+1}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie que : $(x-1)(x-2)(x+2)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Signifie que : $x-1=0$ ou $x-2=0$ ou $x+2=0$

Signifie que : $x=1$ ou $x=2$ ou $x=-2$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{A(1,0);E(-2,9);D(2,1)\}$

9)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessus de (C_g)

Donc : graphiquement : $S =]-\infty,-2] \cup]-1,1] \cup [2,+\infty[$

10)Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / |x|+1 \neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x| = -1$ impossible

Donc : $D_h = \mathbb{R}$

b) Montrons que la fonction h est paire

si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$h(-x) = \frac{3|-x|-3}{|-x|+1} = \frac{3|x|-3}{|x|+1} = h(x)$ C'est à dire : $h(-x) = h(x)$

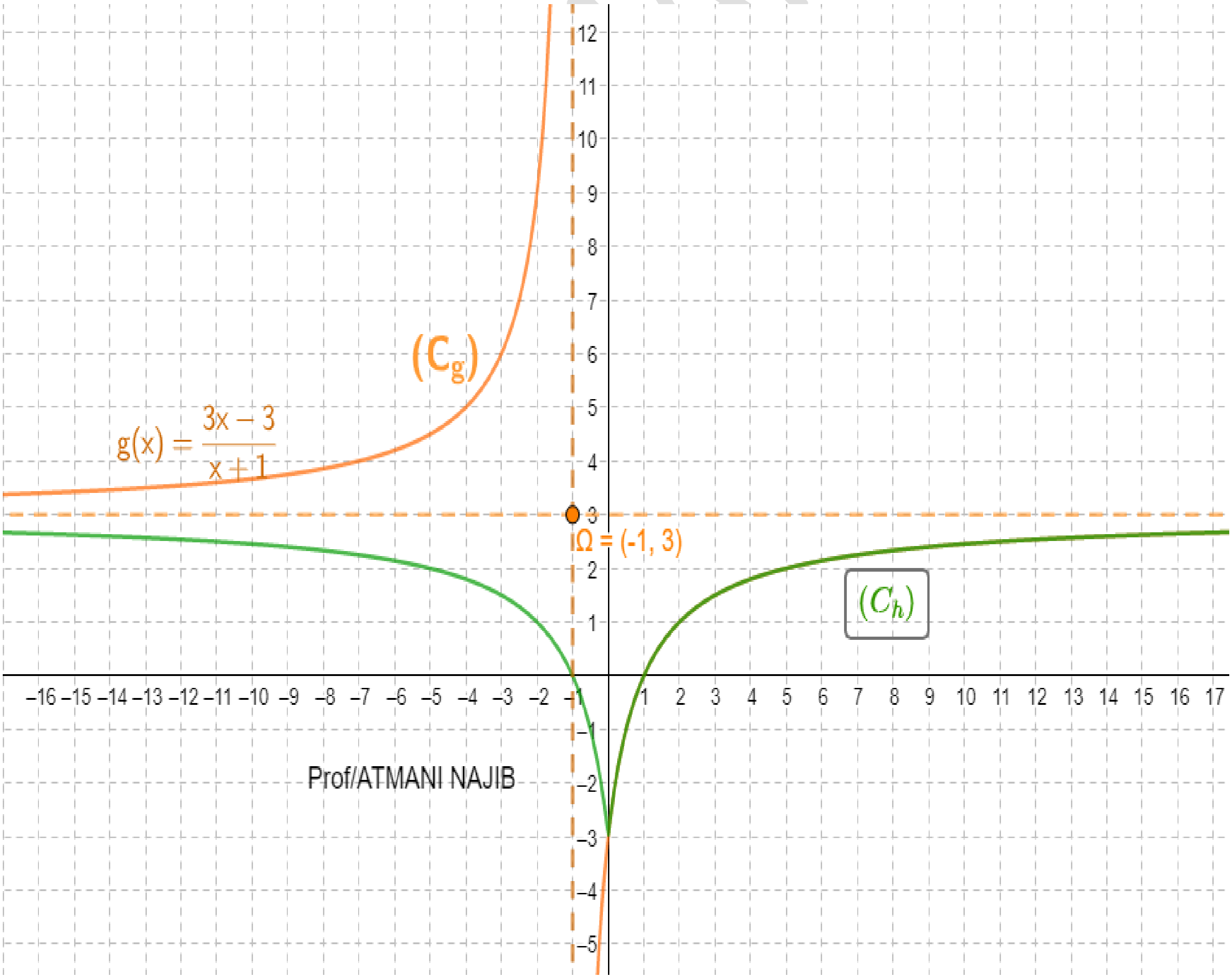
Donc h est une fonction paire,

c)Vérifions que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

Soit : $\mathbb{R}^+$ on a : $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1} = \frac{3x-3}{x+1} = g(x)$ car $|x| = x$

Donc : $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$

11) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

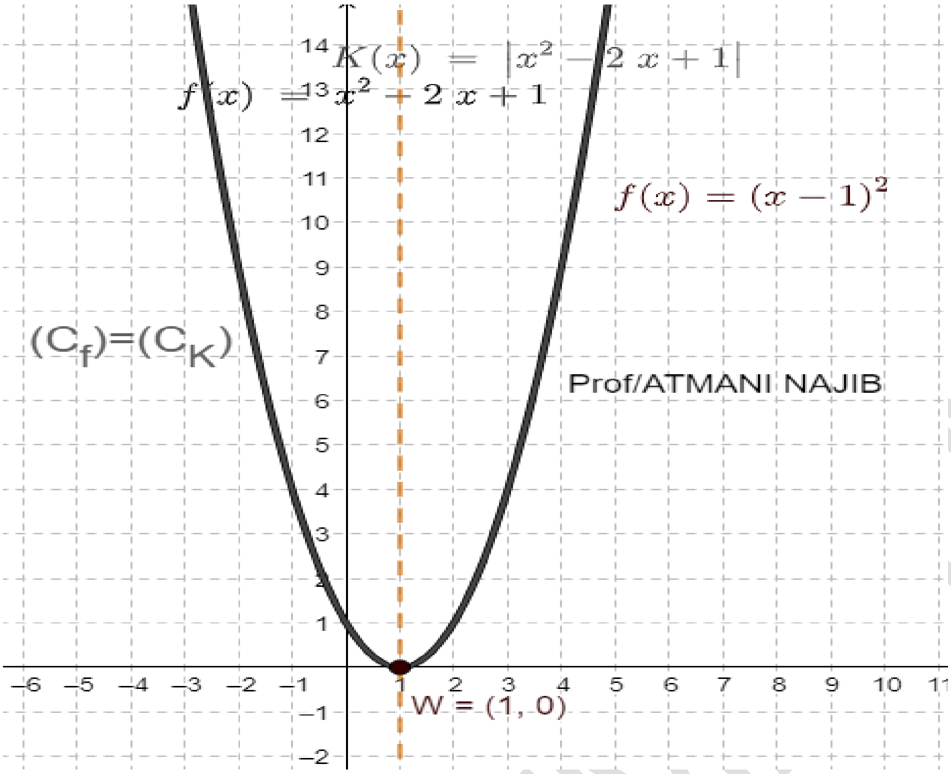


12)Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

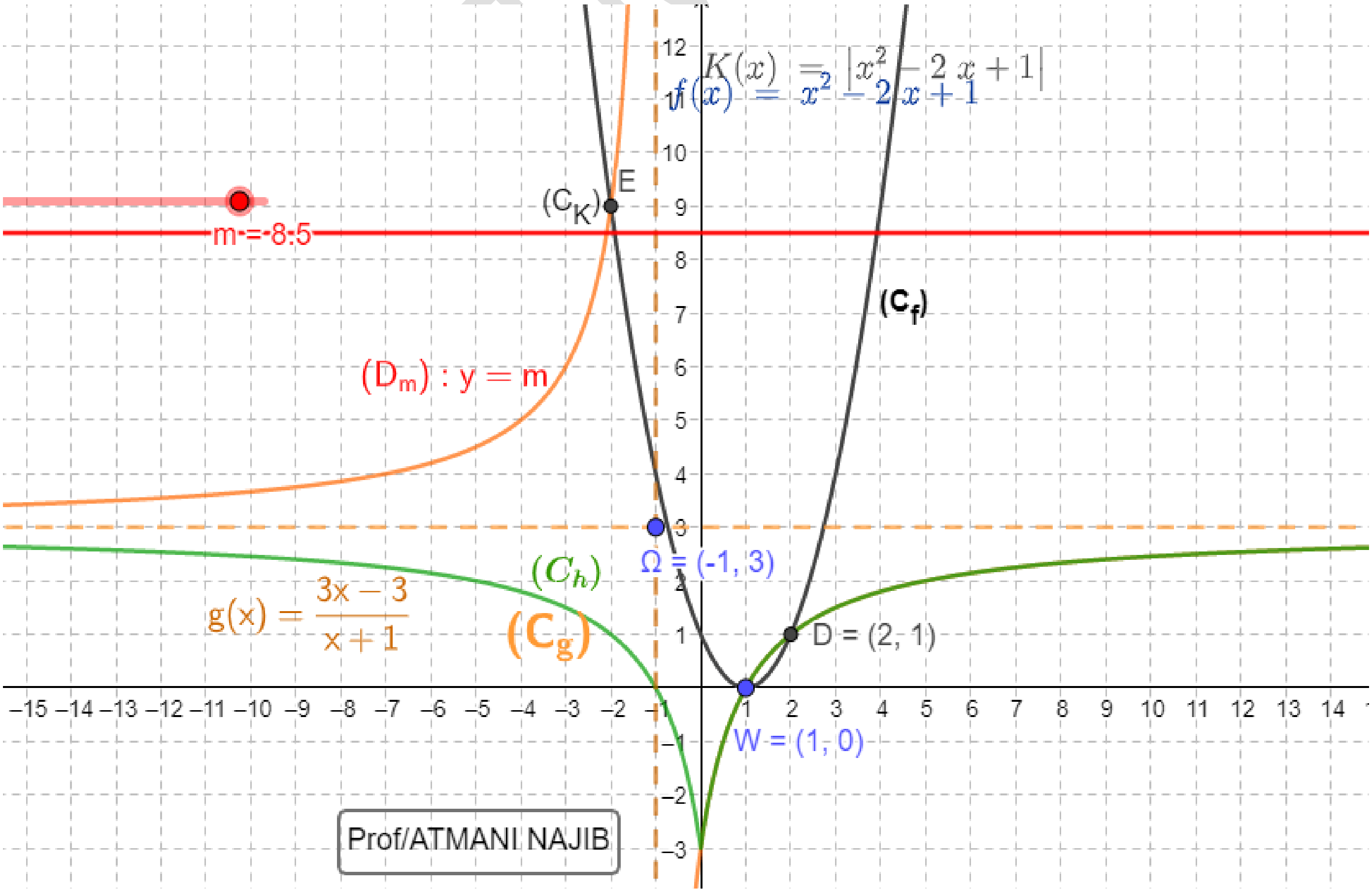
a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

On a : $K(x)=|f(x)|=f(x)$ car $f(x)=(x-1)^2\geq 0$

Donc : (C_f) et (C_K) sont confondues



Remarque : tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x)=m$:est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m)\quad y=m$

⊳ Si $m<0$: l'équation n'a pas de solutions
⊳ Si $m=0$: l'équation admet une seule solution
⊳ Si $m>0$: l'équation admet deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien