Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°5/N sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $6pts(0,5pts+1,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{2}(|x+2|-|x-2|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire une interprétation graphique
3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=[0;2]$ et $J=[2;+\infty[$
4) Dresser son tableau de variation sur D_f
5) Soit (C_f) la courbe de f .

a) Est ce que les points $A(2;2)$; $B(1;2)$ appartiennent à la courbe (C_f)

b) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Solution :1) Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) - Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{1}{2}(|-x+2|-|-x-2|)=\frac{1}{2}(|-(x-2)|-|-(x+2)|)$

$f(-x)=\frac{1}{2}(|(x-2)|-|(x+2)|)$ car $|-x|=|x|$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(|-(x-2)|+|(x+2)|)$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(||(x+2)|-(x-2)|)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_f) il suffit de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

3) si $x\in I=[0;2]$ alors : $0\le x\le 2$

Donc : $x-2\le 0$ et $x+2\ge 0$

Par suite : $f(x)=\frac{1}{2}(x+2-(-(x-2)))=\frac{1}{2}(x+2+x-2)=x$

Si $x\in J=[2;+\infty[$ alors : $x\ge 2$

Donc : $x-2\ge 0$ et $x+2\ge 0$

Par suite : $f(x)=\frac{1}{2}(x+2-(x-2))=\frac{1}{2}(x+2-x+2)=2$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x)=x \ si \ x\in I=[0;2] \\ f(x)=2 \ \ si \ x\in J=[2;+\infty[\end{cases}$

4) tableau de variation sur D_f :

On a : f est constante sur l'intervalle : $J=[2;+\infty[$ et croissante dans $I=[0;2]$

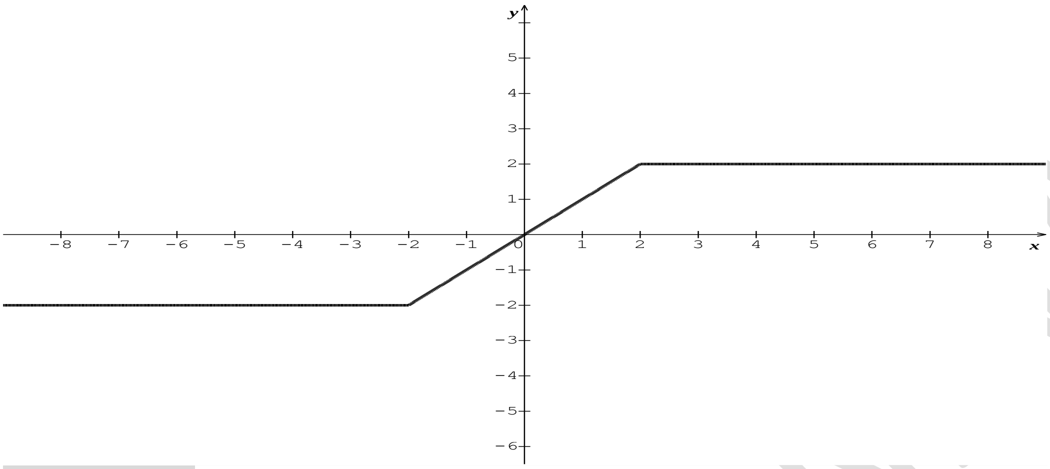
Et puisque f est une fonction impaire alors f est constante sur l'intervalle : $J'=]-\infty;-2]$ et croissante dans $I'=[-2;0]$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$\longrightarrow$	-2 $\nearrow$	0 $\nearrow$	2	$\longrightarrow$

a) On a $f(2)=\frac{1}{2}(|2+2|-|2-2|)=2$ donc : $A(2;2)\in(C_f)$

On a $f(1)=\frac{1}{2}(|1+2|-|1-2|)=1\neq 2$ donc : $B(1;2)\notin(C_f)$

b) f est une fonction impaire donc (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère



Exercice 02 : $5pts(0,5pts+1,5pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) a) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I=]-\infty;1[$ et $J=]1;+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Comparer les deux nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solutions :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 1\}$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) a) Soient $x_1\in\mathbb{R}-\{1\}$ et $x_2\in\mathbb{R}-\{1\}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{x_1x_2-x_1-x_2x_1+x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}\frac{1}{(x_1-x_2)}=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

b)

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty;1[$

Soient : $x_1 \in]-\infty;1[$ et $x_2 \in]-\infty;1[$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Donc : $\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases}$

Donc : $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$

Donc : $\dfrac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $I =]-\infty;1[$

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J =]1;+\infty[$

Soient : $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Donc : $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases}$

Donc : $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$ Donc : $\dfrac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $J =]1;+\infty[$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

4) Comparons les deux nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

On a : $\sqrt{2} \in]1;+\infty[$ et $\sqrt{3} \in]1;+\infty[$ et $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ et f est strictement décroissante sur : $J =]1;+\infty[$

Donc : $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$

Donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} > \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 03 : $9pts(0,5pts + 1pts + 1pts + 0,5pts + 2pts + 1,5pts + 1,5pts + 1pts)$

Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = 2x - 4$

1) Déterminer D_f

2) Ecrire $f(x)$ sous la forme canonique : $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$ (déterminer a; α et β)

3) En déduire la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques

4) Déterminer le Tableau de variations de f

5)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)

6)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) > g(x)$

8)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Solution : 1) On a : $f(x) = x^2 - 2x - 1$: f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) Méthode1 : $f(x) = x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 1 = (x-1)^2 - 2 = 1(x-1)^2 - 2$

Donc : $f(x) = x^2 - 2x - 1 = 1(x-1)^2 - 2$ et $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

Donc $\alpha=-1$ et $\beta=-2$ et $a=1$

Méthode2 : $\left(f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c\right)$ On a : $a=1$ et $b=-4$ et $c=-2$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=-1$ et $\beta=f\left(-\alpha\right)=f\left(1\right)=\left(1\right)^{2}-2\times\left(1\right)-1=-2$

Donc : $f\left(x\right)=a\left(x+\alpha\right)^{2}+\beta=1\left(x-1\right)^{2}-2$

3) la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(-\alpha;\beta\right)$; $W\left(1;-2\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=1$

4)Tableau de variations de f : On a $a=1>0$ donc :

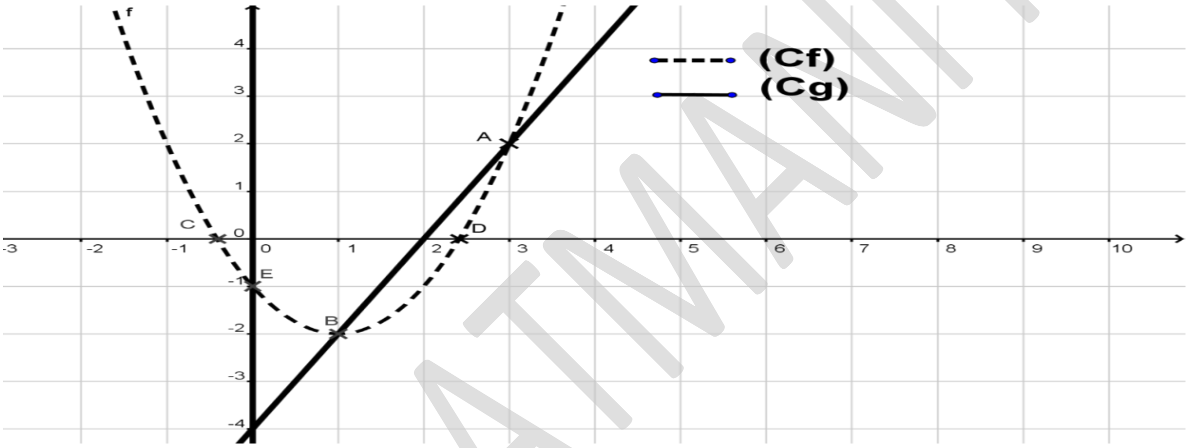
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

3) $g\left(x\right)=2x-4$

g est une fonction affine donc la courbe $\left(C_f\right)$ de f est une droite $\left(D\right)$:

$g\left(0\right)=2\times0-4=-4$ Alors $\left(0;-4\right)\in\left(D\right)$ et $g\left(1\right)=2\times1-4=-2$ alors $\left(1;-2\right)\in\left(D\right)$

Les courbes représentatives $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ sont données dans le repère ci-dessous :



2) a) Résolution graphique de l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$

On a donc $x=1$ et $x=3$ donc $S=\{1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

$f\left(x\right)=g\left(x\right)$ Signifie : $x^2-2x-1=2x-4$ c'est-à-dire : $x^2-4x+3=0$

$a=1$ et $b=-4$ et $c=+3$; $\Delta=b^2-4ac=\left(-4\right)^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

Donc : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$ et $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$

Donc $S=\{1;3\}$

3) a) Résolution graphique de l'inéquation $f\left(x\right)>g\left(x\right)$

La courbe $\left(C_f\right)$ est au-dessus de $\left(C_g\right)$ si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

$f(x) > g(x)$ Signifie $x^2 - 2x - 1 > 2x - 4$ c'est-à-dire : $x^2 - 4x + 3 > 0$

Les racines sont : $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

4)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0$ Signifie $x^2 - 2x - 1 = 0$; $a = 1$ et $b = -2$; $c = -1$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times(-1) = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-2) + 2\sqrt{2}}{2\times1} = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) - 2\sqrt{2}}{2\times1} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(1 - \sqrt{2}; 0)$ et $D(1 + \sqrt{2}; 0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0) = 0^2 - 2\times0 - 1 = -1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien