Tronc commun Sciences BIOF

# *Correction :* Devoir surveillé n°5/O sur : FONCTIONS - Généralités

**Exercice01 :** $4pts(1pts \times 4)$ ; Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{2024x-1}{x^3-5x}$ 2) $f(x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}$ 3 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x}+2}$ 4) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin x}{\sqrt{2}\sin x-1}$

**Solution :** 1) $f(x)=\dfrac{2024x-1}{x^3-5x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-5x\neq 0\}$

$x^3-5x=0$ Signifie $x(x^2-5)=0$ Équivaut à : $x=0$ ou $x^2-5=0$

C'est-à-dire : $x=0$ ou $x^2=5$

Signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\}$ ou $D_f=]-\infty;-\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5};0[\cup]0;\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5};+\infty[$

2) $f(x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2+x\geq 0 \ \ et \ \ 1-x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2 \ \ et \ \ x\leq 1\}$ Donc $D_f=[-2,1]$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x}+2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\neq 0 \ et \ \ x\geq 0 \ \ et \ \ x-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\neq -2 \ \ et \ \ x\geq 0 \ \ et \ \ x\geq 1\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/ \ \ x\geq 1\}$

Donc : $D_f=[1;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin x}{\sqrt{2}\sin x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{2}\sin x-1\neq 0\}$

$\sqrt{2}\sin x-1=0$ Signifie $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Signifie $\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Signifie $x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Signifie $x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

**Exercice02 :** $(2pts)$ Soient les deux fonctions suivantes : $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

Est-ce que : $f=g$ ? Justifier

**Solution :** Nous avons : a) $D_f=\mathbb{R}-\{-1;0\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1;0\}$

b) $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}=f(x)$

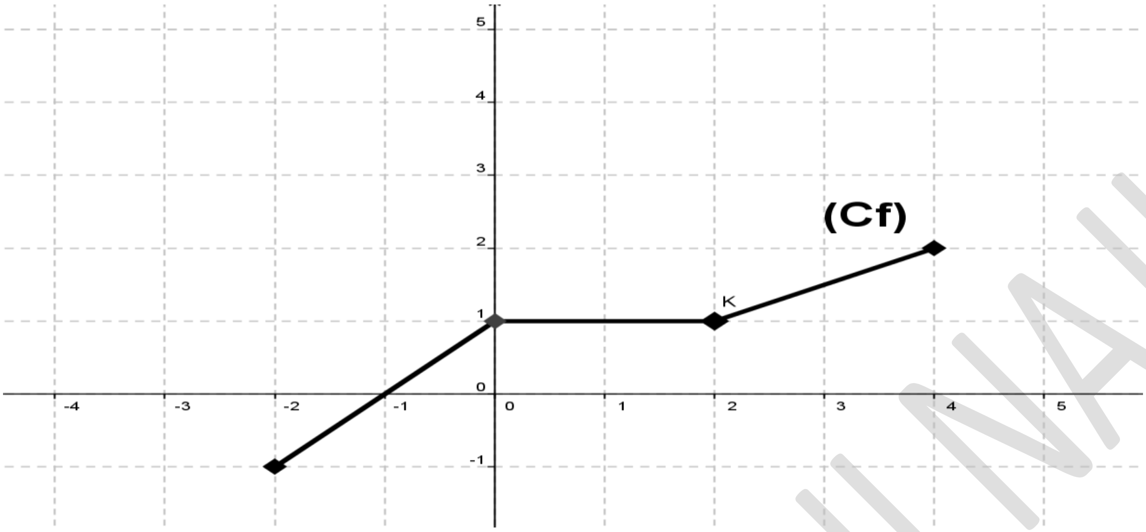
Ainsi : $D_f = D_g$ et $g(x) = f(x)$ pour tout de : $D_f = D_g$

Donc : $f = g$

**Exercice03 :** $6pts(1pts+1pts+0,5pts+1pts+1pts+1,5pts)$

La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction f

Sur l'intervalle : $[-2,4]$




1) Déterminer les images des nombres **: -2 ; -1 ;0** par la fonction f

2) Donner les antécédents de : 2 ; 0 et 3 par f.

3) Combien d'antécédents à le nombre 1 par f.

4) Quel est le minimum de la fonction f sur $[-2,4]$ ? en quelle valeur ce minimum est-il atteint ?

5) Quel est le maximum de la fonction f sur $[-2,4]$ ? en quelle valeur ce maximum est-il atteint ?

6) Déterminer : $f(x)$ en fonction de $x$ sur $[-2,4]$

**Solution :** 1) $f(-2) = -1$ et $f(-1) = 0$ et $f(0) = 1$

2) 2 admet un unique antécédent par f c'est : 4

0 admet un unique antécédent par f c'est : -1

3 n'admet pas d'antécédents par f

3) Le nombre 1 admet une infinité d'antécédents à par f.

4) Le minimum de la fonction f sur $[-2,4]$ est : -1 ; il est atteint en -2

5) Le maximum de la fonction f sur $[-2,4]$ est : 2 ; il est atteint en 4

6) On remarque que la représentation graphique de la fonction f est un segment sur chacun des l'intervalles : $[-2,0]$et $[0,2]$ et $[2,4]$ donc la fonction f est affine sur ces intervalles

• Sur l'intervalle $[-2,0]$ on a :

$f(x) = a_1x + b_1$ et on a : $f(-2) = -1$ et $f(-1) = 0$

Donc : $\begin{cases} -2a_1 + b_1 = -1 \\ -a_1 + b_1 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} -a_1 = -1 \\ b_1 = a_1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$

Par suite : $f(x) = x + 1$

• Sur l'intervalle $[0,2]$ on a : $f(x) = 1$

• Sur l'intervalle $[2,4]$ on a : $f(x) = a_2x + b_2$ et on a : $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$

Donc : $\begin{cases} 2a_2 + b_2 = 1 \\ 4a_2 + b_2 = 2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 2a_2 = 1 \\ b_2 = 2 - 4a_2 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 = 2 - 2 = 0 \end{cases}$

Par suite : $f(x)=\frac{1}{2}x$

Par conséquent : $\begin{cases} f(x)=x+1 & si \quad x\in[-2,0] \\ f(x)=1 & si \quad x\in[0,2] \\ f(x)=\frac{1}{2}x & si \quad x\in[2,4] \end{cases}$

**Exercice04 :** $08pts(1pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+1pts+1pts+1,5pts+1pts+1pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2-4x+7$

1) Déterminer $D_f$ et déterminer $\alpha$ et $\beta$ tel que : $f(x)=2(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déterminer les éléments caractéristiques de $(C_f)$

3) Déterminer le Tableau de variations de $f$

4) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)>0$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ On a : $5\le f(x)\le\frac{11}{2}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-1;0]$ On a : $7\le f(x)\le 13$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec les axes du repère

7)Tracer la courbe représentative de $(C_f)$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

**Solution :** $f(x)=2x^2-4x+7$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=2(x^2-2x)+7=2(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)+7=2((x-1)^2-1)+7=2(x-1)^2-2+7$

Donc ; $f(x)=2(x-1)^2+5$ par suite : : $\alpha=-1$ et $\beta=5$ et $a=2$

2)les éléments caractéristiques de $(C_f)$ :La courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(1;5)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$.

3)Le Tableau de variations de $f$ : On a $a=2\succ 0$

Donc :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ |

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(1)=5$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(1)\le f(x)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $5\le f(x)$ or $0<5$ Par suite : $0<f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ alors : $1\le x\le\frac{3}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[1;\frac{3}{2}\right]$

Alors : $f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$ et comme : $f(1)=5$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{3}{2}\right)+7=\frac{11}{2}$

Par suite : $5 \leq f(x) \leq \frac{11}{2}$ si $x \in \left[1;\frac{3}{2}\right]$

b) Soit : $x \in [-1;0]$ On a alors : $-1 \leq x \leq 0$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-1;0]$

Alors : $f(0) \leq f(x) \leq f(-1)$ et comme : $f(0)=2(0)^2-4\times(0)+7=7$ et $f(-1)=2(-1)^2-4\times(-1)+7=13$

Par suite : $7 \leq f(x) \leq 13$

6)a) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $2x^2-4x+7=0$ $a=2$ et $b=-4$ et $c=7$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times3=16-24=-8<0$ Donc : Pas de solution

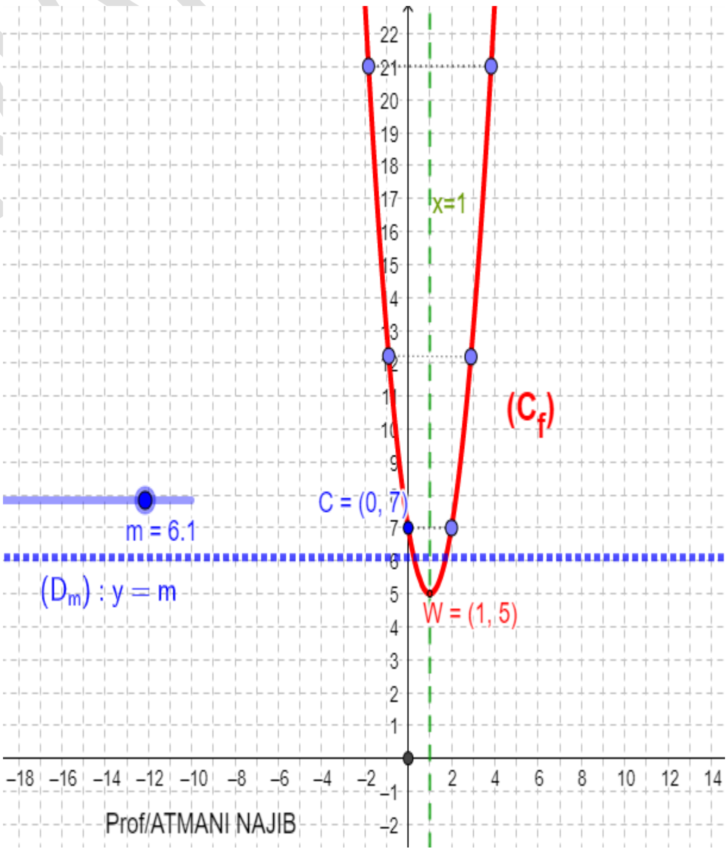
Donc : la courbe $(C_f)$ ne coupe pas l'axe des abscisses

b) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a $f(0)=2(0)^2-4\times(0)+7=7$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées est : $C(0;7)$

7) la courbe représentative $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$




| x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| f(x) | 5 | 7 | 12 |

8) Résolution graphique de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $(C_f)$ et la droite : $y=m$

**Si**: $m>5$ ou $m=1$ il y'a deux solutions

**Si**: $m=5$ il y'a une solution

C'est : $x=1$

**Si**: $m<5$ pas de solutions

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*