Correction : Devoir surveillé n°5/P sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice 01 : $2,5pts(1pts+1,5pts)$; Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-3}$ et (C_f) la courbe de f dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

1) Déterminer D_f

2) Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq\frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

2)Il suffit de montrer que : f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\frac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite : la (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice 02 : $5,5pts(1pts+1pts+1,5pts+0,5pts+0,5pts+1pts)$

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2) Étudier la parité de f .
3) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

b) En déduire le sens de variation de f sur $]+\infty,0]$

4)Dresser alors le tableau de variations de f sur D_f .

5) Montrer que pour tout réel x, $-1\leq f(x)\leq 1$

Solution : 1) $D_f=\{x\in E/f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+1 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Étudions la parité de f .

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors : $-x\in\mathbb{R}$

b) $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$

Donc : f est paire

3) a) Montrons que f est décroissante sur $[0,+\infty[$

Soit $x_1 \in [0,+\infty[$ et $x_2 \in [0,+\infty[$ tel que : $x_1 < x_2$

Alors : $x_1^2 < x_2^2$

Donc : $x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1$

Donc : $\frac{1}{x_2^2+1} < \frac{1}{x_1^2+1}$

Donc : $f(x_2) < f(x_1)$

Donc : f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

b) f est paire et le symétrique de $[0,+\infty[$ est l'intervalle $]-\infty;0]$

Puisque : f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

5) par suite le tableau de variations de f sur $D_f = \mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

$f(0) = 1$

3) Pour tout x, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est positif comme quotient de deux nombres positifs et f admet 1 comme maximum d'après le tableau de variations.

Donc ; $0 \leq f(x) \leq f(0)$

Donc ; $0 \leq f(x) \leq 1$ Pour tout réel x

Exercice 03 : $2pts(0,5pts + 1,5pts)$ Soit f une fonction numérique tel que :

$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$

1) Calculer : $f(0) = -4$

2) Démontrer que : -4 est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^+$

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - 4$

$f(x) = (x + \sqrt{x})^2 - 4$ Donc : $f(x) + 4 = (x + \sqrt{x})^2 \geq 0$

Donc : $f(x) + 4 \geq 0$ par suite : $f(x) \geq -4$ et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

Donc : $f(0) = -4$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 0$

Exercice 04 :

$10pts(0,5pts + 0,5pts + 0,5pts + 0,5pts + 0,5pts + 1pts + 0,5pts + 2pts + 1pts + 1pts + 1pts + 1pts)$

Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)a) Déterminer D_g

b) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ses éléments caractéristiques

c) Déterminer le Tableau de variations de g

2) a) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

b) Déterminer le Tableau de variations de f

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;5)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) a) Résoudre graphiquement de l'équation $f(x)=g(x)$:

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Solution : 1) a) $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$;

On a : $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie : $x-1\neq 0$ équivaut à : $x\neq 1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

b)Si $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: la division euclidienne de : $2x+1$ *par* $x-1$ donne :

$$\begin{array}{l|l} 2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x+2 & 2 \\ \cline{1-1} \quad 3 & \end{array}$$

$$g(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

Puisque : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

On a : $g(x)=2+\frac{3}{x-1}$ avec : $\alpha=-1$ et $\beta=2$ et $k=3>0$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$; $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$

c) $k=3>0$: Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	$\searrow$	‖	$\searrow$

Methode2 : $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1=-3\prec 0$: g est strictement décroissante sur les intervalles :

$]1\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 1[$

2) a) On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(-\alpha;\beta\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f\left(x\right)=x^2+1=1\left(x-0\right)^2+1$ (la forme canonique) : $\alpha=0$ et $\beta=1$

Dans un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W\left(-\alpha;\beta\right)$ c'est-à-dire : $W\left(0;1\right)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-\alpha=0$

Le tableau de variations de f :

b)Dans notre exercice on a : $-\alpha=0$ et $\beta=1$ et $a=1>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

3) Intersection de la courbe $\left(C_g\right)$ avec l'axe des abscisses :

$$g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

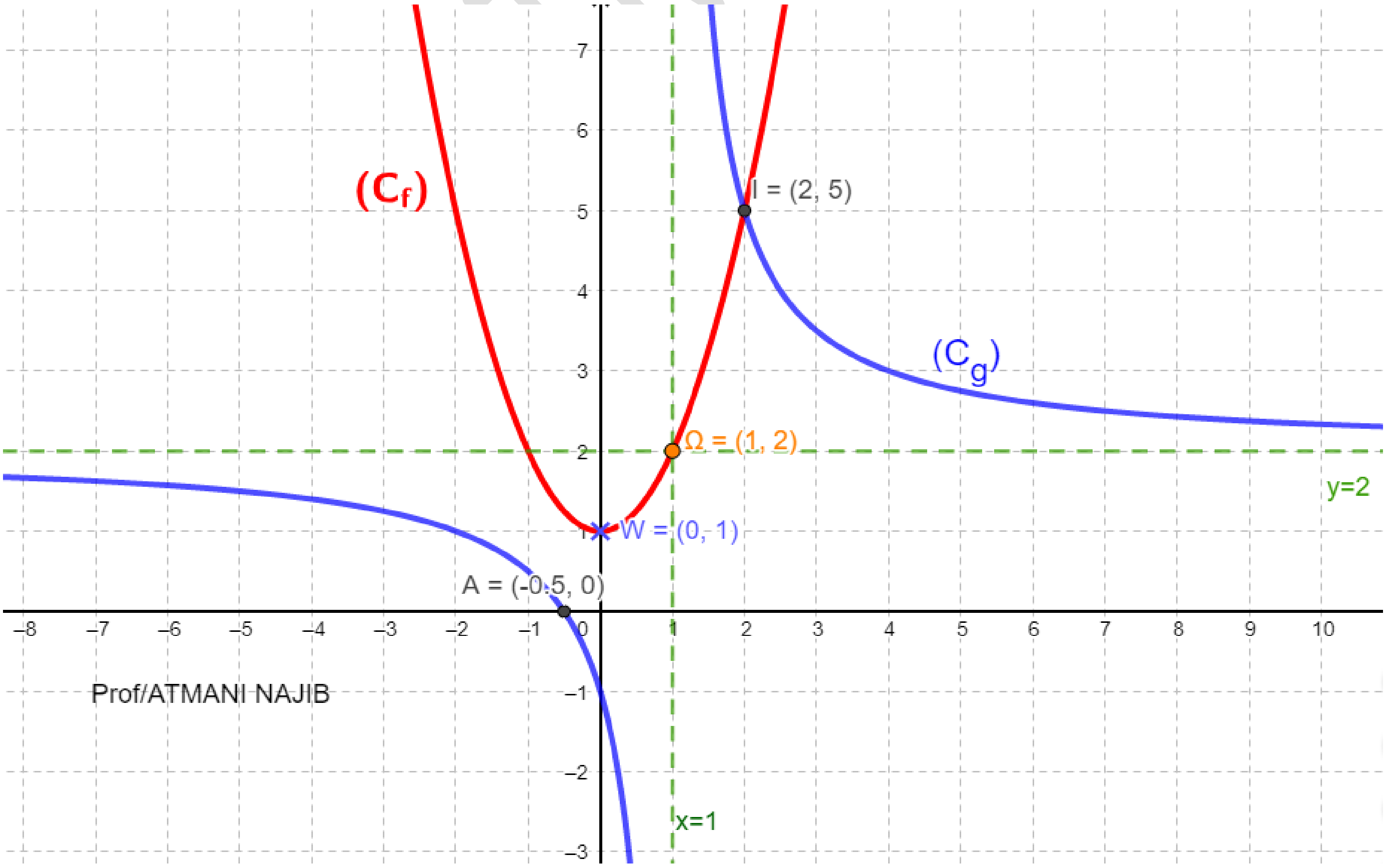
Le point d'intersection de la courbe $\left(C_g\right)$ avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$

4) a) Vérifier que : $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$se coupent en : $A\left(2\;;\;5\right)$

$f\left(2\right)=2^2+1=5$ donc : $A\left(2;5\right)\in\left(C_f\right)$ et $g\left(2\right)=\frac{2\times 2+1}{2-1}=5$ donc : $A\left(2;5\right)\in\left(C_g\right)$

Donc : $\left(C_f\right)\cap\left(C_g\right)=\left\{A\left(0;2\right)\right\}$

b) Traçage des courbes$\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans un même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$



5) a) Etude graphique du signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$g(x)\geq 0$ si et seulement si la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses

$g(x)\geq 0$ Signifie que $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$ et $g(x)\leq 0$ Signifie que $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

b) Etudions algébriquement le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

Voici le tableau de signe qui résume le signe de g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

6) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2\ ;\ 5)$

Donc : l'abscisse du point d'intersection des courbes (C_f) et (C_g) est $x=2$ par suite : $S=\{2\}$

7)b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left[2;+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;1\right[\cup\left[2;+\infty\right[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien