Correction : Devoir surveillé n°5/Q sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice 01 : $2,5pts(1,5pts+1pts)$ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :1) $f(x)=\frac{6x^3+|2x|}{|x-3|-|x+5|}$ 2) $f(x)=\frac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{6x^3+|2x|}{|x-3|-|x+5|}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x-3|-|x+5|\neq 0\}$

$|x-3|-|x+5|=0$ Signifie que : $|x-3|=|x+5|$

Signifie que : $x-3=x+5$ ou $x-3=-(x+5)$

Signifie que : $-3=5$ (impossible) ou $x-3=-x-5$

Signifie que : $2x=-2$

Signifie que : $x=-1$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) $f(x)=\frac{-x^2+2006}{|x+2|+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x+2|+1\neq 0\}$

$|x+2|+1=0$ Signifie que : $|x+2|=-1$ pas de solutions Car $|x+2|\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2+27}-5\sqrt{3x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+27\geq 0\ et\ 3x\geq 0\}$ Or $x^2+27\geq 0$ et $3>0$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$

$D_f=[0;+\infty[$

Exercice 02 : $11pts(0,5pts+1,5pts+1,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+1pts+1,5pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2-2x+1$

1)Préciser le domaine de définition de f

2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

3)Etudier la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;-1]$

4)Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\leq 2$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ On a : $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 2$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-3;-1]$ On a : $-2\leq f(x)\leq 2$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=-x-1$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x) < f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=-x^2-2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(-x_2^{\ 2}-2x_2+1\right)-\left(-x_1^{\ 2}-2x_1+1\right)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2^{\ 2}-2x_2+1+x_1^{\ 2}+2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_2^{\ 2}+x_1^{\ 2}-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-\left(x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}\right)-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)\left(-(x_2+x_1)-2\right)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=-(x_1+x_2)-2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-1;+\infty[$ et $x_2\in[-1;+\infty[$ alors : $x_1\geq-1$ et $x_2\geq-1$ implique $x_1+x_2\geq-2$

Donc $-(x_1+x_2)\leq 2$ par suite : $-(x_1+x_2)-2\leq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I=[-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-1]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-1]$ et $x_2\in]-\infty;-1]$ alors : $x_1\leq-1$ et $x_2\leq-1$ cela implique $x_1+x_2\leq-2$

Donc $-(x_1+x_2)\geq 2$ par suite : $-(x_1+x_2)-2\geq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\geq 0$

D'où : f est croissante sur $J=]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)+1=-1+2+1=2$

Donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1)=2$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq f(-1)$

Par suite : $f(x)\leq 2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-1\leq x\leq\frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I=[-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{1}{2}\right)\leq f(x)\leq f(-1)$ et comme : $f(-1)=2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}-1+1=-\frac{1}{4}$

Par suite : $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 2$

b) Soit : $x\in[-3;-1]$ On a alors : $-3\leq x\leq -1$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J=]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-3;-1]$

Alors : $f(-3)\leq f(x)\leq f(-1)$ et comme :

$f(-3)=-(-3)^2-2\times(-3)+1=-9+6+1=-2$ Et $f(-1)=2$

Par suite : $-2\leq f(x)\leq 2$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2-2x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times(-1)\times1=4+4=8>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{-2}=-1-\sqrt{2}$ **et** $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{-2}=-1+\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-1-\sqrt{2};0)$ et $B(-1+\sqrt{2};0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

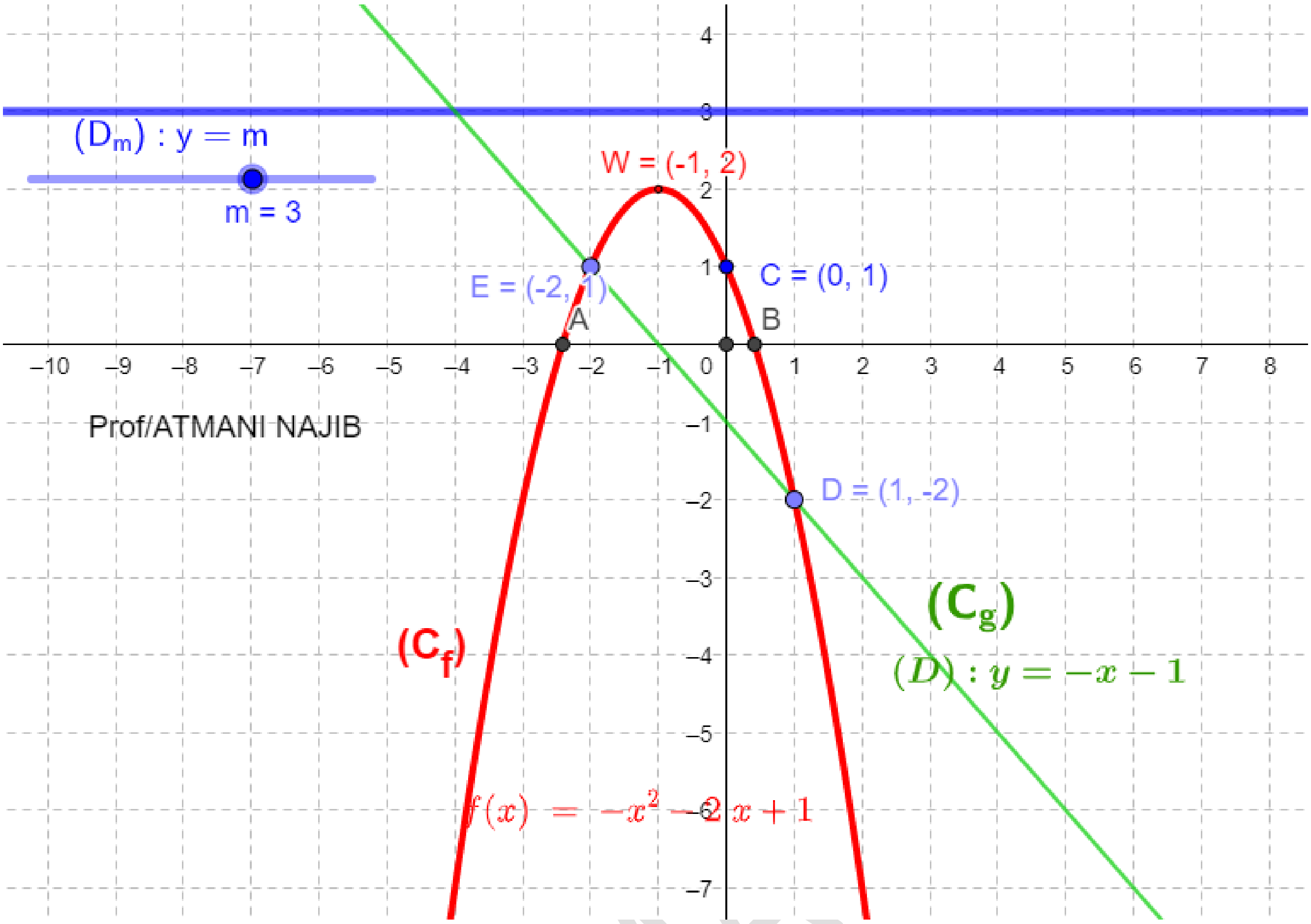
Et on a $f(0)=-0^2-2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-7	-2	1	2	1	-2	-7

x	-2	1
g(x)	1	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 1$ donc $S = \{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 - 2x + 1 = -x - 1$ c'est-à-dire : $-x^2 - x + 2 = 0$ c'est-à-dire :

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $S = \{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) \geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) \geq f(x)$:

$g(x) \geq f(x)$ Signifie $-x - 1 \geq -x^2 - 2x + 1$

C'est-à-dire : $x^2 + x - 2 \geq 0$

Les racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−	0	+	

Donc $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+1-m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$-x^2-2x+1-m=0$ Signifie $m=-x^2-2x+1$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>2$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=2$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m<2$ il y'a deux solutions

Exercice 03 : $6,5pts(0,5pts+1pts+1,5pts+0,5pts+1,5pts+1,5pts)$ Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : f est impaire

3)a) Montrer que la courbe représentative de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ est une portion d'une hyperbole que l'on précisera

b) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g

4)Etudier les variations de de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ puis donner le tableau de variation de f sur D_f

5) Construire (C_f) dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

1)On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-2\neq 0$

Signifie $|x|\neq 2$ c'est-à-dire : $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2)a) Montrons que f est impaire :

☞ $x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ Signifie $x\neq 2$ et $x\neq -2$

Signifie $-x\neq -2$ et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq 2$

Signifie $-x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

☞ $f(-x)=\frac{-x}{|-x|-2}=\frac{-x}{|x|-2}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=-\frac{x}{|x|-2}=-f(x)$ par suite : f est impaire

3)a) Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

Donc : $|x|=x$ par suite : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}$

Et puisque f est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(o;\vec{i};\vec{j})$

Soit $x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$ on a : $f(x) = \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$

Donc : $f(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$ Pour tout $x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$

Puisque : $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ et $k = 1 > 0$

Donc : sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ (C_f) est une portion d'une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x = 2$ et $y = 1$

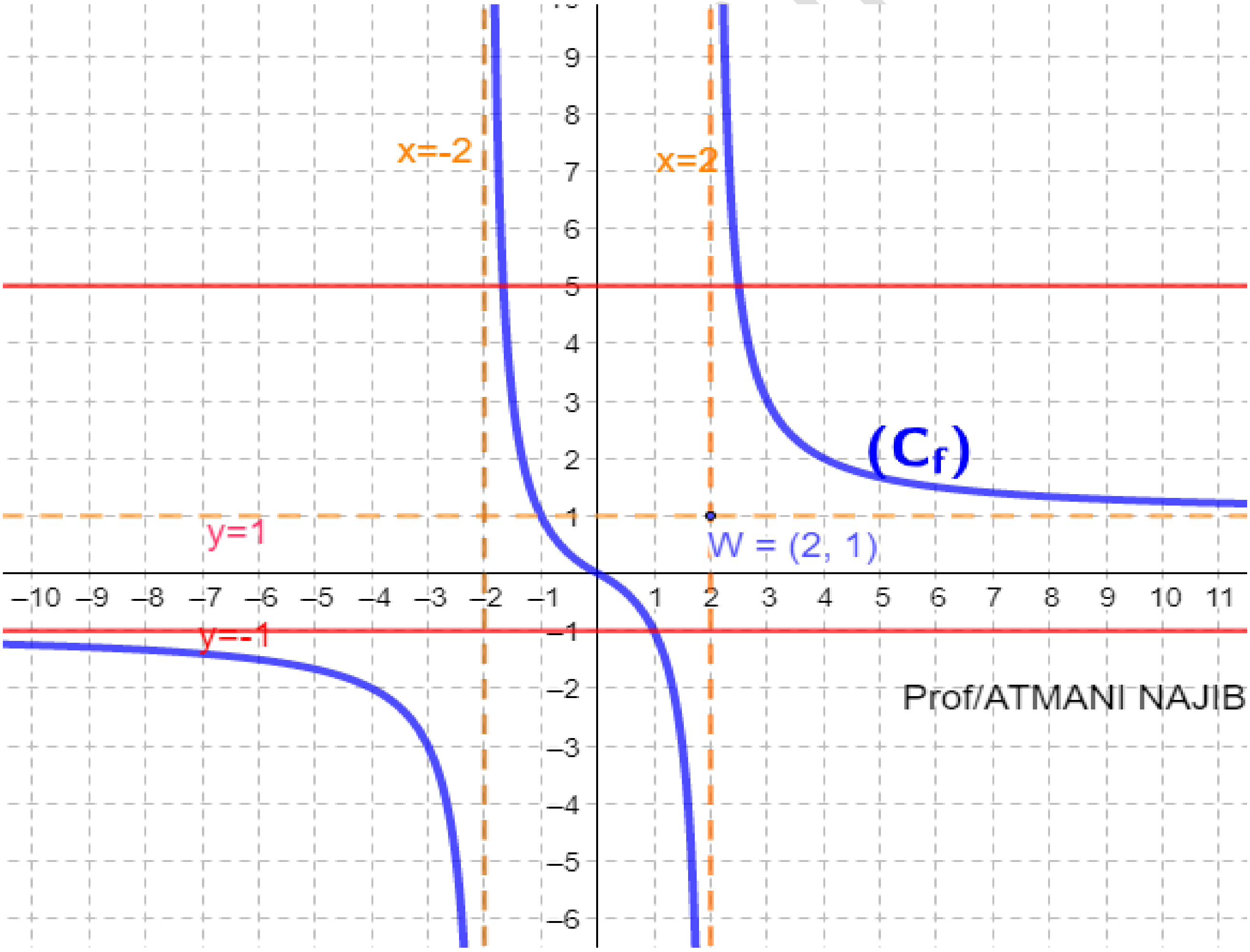
b) la courbe (C_f) de fonction f sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ coïncide avec la portion de l'hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x = 2$ et $y = 1$

4)Puisque : $k = 1 > 0$ alors f est strictement décroissante sur $[0;2[$ et $]2;+\infty[$

Puisque f est impaire alors en déduit le tableau de variation de f sur D_f

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘	0	↘	‖	↘

5) Construction de (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien