Correction : Devoir surveillé n°5/R sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice 01 : $15pts(0,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts+1,5pts$ $1pts+1pts+1pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1)Déterminer D_f

2) a) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)+1$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$

c) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$

3)a) Déterminer α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

c) Dresser le Tableau de variations de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\geq -1$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ On a : $5\leq f(x)\leq\frac{9}{16}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $-1\leq f(x)\leq\frac{5}{4}$

5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de(C_f)et(C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

9)Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2+4x=4m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(\frac{1}{4}x_2{}^2+x_2\right)-\left(\frac{1}{4}x_1{}^2+x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{4}x_2{}^2+x_2-\frac{1}{4}x_1{}^2-x_1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}\left(x_2{}^2-x_1{}^2\right)+\left(x_2-x_1\right)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)\left(\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1\right)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-2;+\infty[$ et $x_2\in[-2;+\infty[$ alors : $x_1\geq -2$ et $x_2\geq -2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)>-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1>0$.

Donc : $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-2]$ et $x_2\in]-\infty;-2]$ alors : $x_1\leq -2$ et $x_2\leq -2$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique : $x_1+x_2<-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)<-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-2]$

3)a) Déterminons : α et β tel que : $f(x)=\frac{1}{4}(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x=\frac{1}{4}(x^2+4x)=\frac{1}{4}(x^2+2\times 2x+2^2-4)=\frac{1}{4}\left((x+2)^2-4\right)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$$

b) On a : $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$ donc : $\alpha=2$ et $\beta=-1$ car : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet : $W(-\alpha;\beta)$

C'est-à-dire : $W(-2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-2$

c) Tableau de variation : On a : $a=\frac{1}{4}>0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

4) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-2)=-1$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-2)\leq f(x)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\leq f(x)$

b) Soit : $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-2\leq x\leq\frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme : $f(-2) = -1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

Par suite : $5 \leq f(x) \leq \frac{9}{16}$ si $x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$

b) Soit : $x \in [-5;-2]$ On a alors : $-5 \leq x \leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty;-2]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f(-5)$ et comme :

$f(-2) = -1$ Et $f(-5) = \frac{1}{4} \times (-5)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$ Par suite : $-1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$

Signifie $x\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 0$ Signifie $x = 0$ ou $\frac{1}{4}x + 1 = 0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x = -4$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $O(0;0)$ et $A(-4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

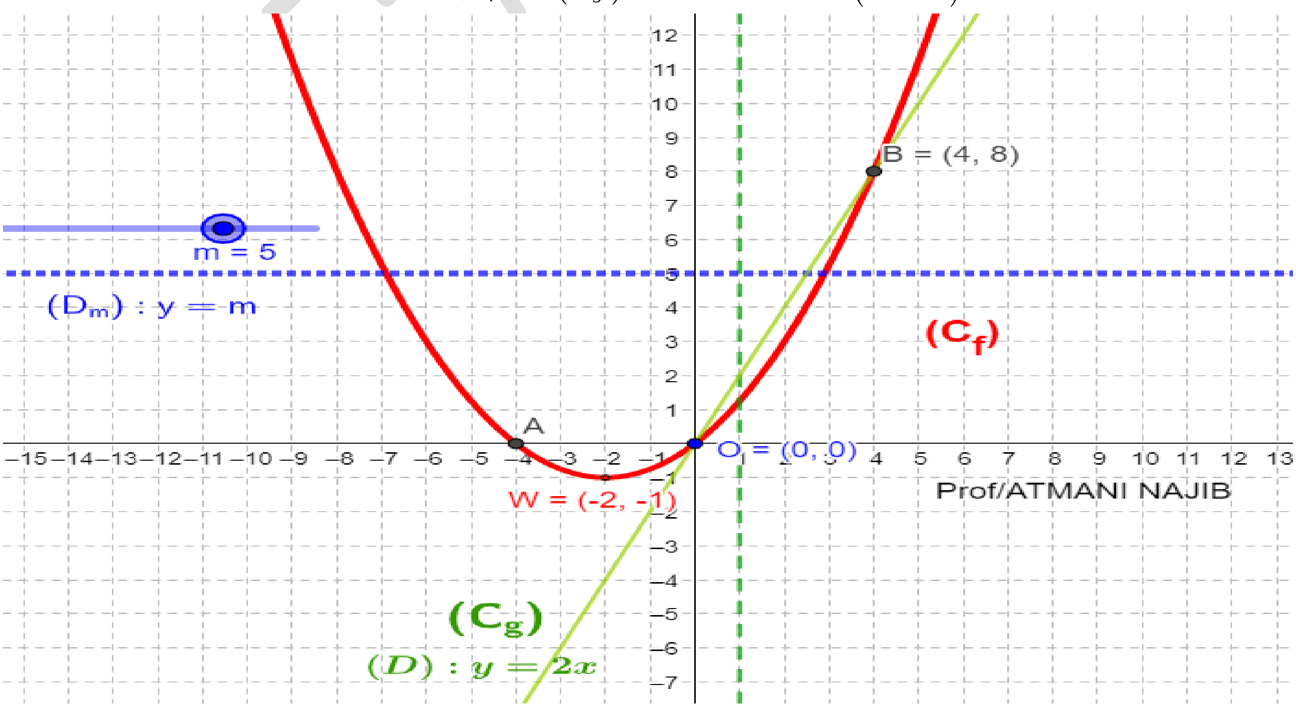
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0) = \frac{1}{4}(0)^2 + 0 = 0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = 2x$

Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:



7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=0$ et $x=4$ donc $S=\{0;4\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $\frac{1}{4}x^2+x=2x$ c'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2-x=0$ Signifie $x\left(\frac{1}{4}x-1\right)=0$

Signifie $x=0$ ou $\frac{1}{4}x-1=0$

Signifie $x=0$ ou $x=4$

Donc : $S=\{0;4\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)\geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in[0;4]$

Donc $S=[0;4]$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)\geq f(x)$:

$g(x)\geq f(x)$ Signifie $\frac{1}{4}x^2+x\leq 2x$

C'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2-x\leq 0$

C'est-à-dire : $x^2-4x\leq 0$

Les racines sont : $x_1=0$ et $x_2=4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=[0;4]$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2+4x=4m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$x^2+4x=4m$ Signifie $m=\frac{x^2+4x}{4}$ Signifie $m=\frac{1}{4}x^2+x$ Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>-1$ il y'a deux solutions

Si : $m=-1$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m<-1$ l'équation n'admet pas de solution

Exercice 02 : $5pts(0,5pts+0,5pts+1pts+0,5pts+2,5pts)$

Soit f une fonction numérique tel que : $g(x)=\frac{-x}{x-2}$

(C_g) Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_g

2) Ecrire $g(x)$ sous la forme : $g(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ (déterminer α et β et k)

3) En déduire la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques

4) Dresser le Tableau de variations de g

5) Tracer la courbe représentative (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution :1) $g(x)=\dfrac{-x}{x-2}$; On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-2\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

$-x$	$x-2$
$x-2$	-1
-2	

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a :

$$g(x)=\frac{-x}{x-2}=\frac{-1(x-2)-2}{x-2}=\frac{-1(x-2)}{x-2}+\frac{-2}{x-2}=-1+\frac{-2}{x-2}$$

Puisque : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-2$; $\beta=-1$ et $k=-2$

3) On a : $g(x)=-1+\dfrac{-2}{x-2}$ avec $\alpha=-2$; $\beta=-1$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=-1$

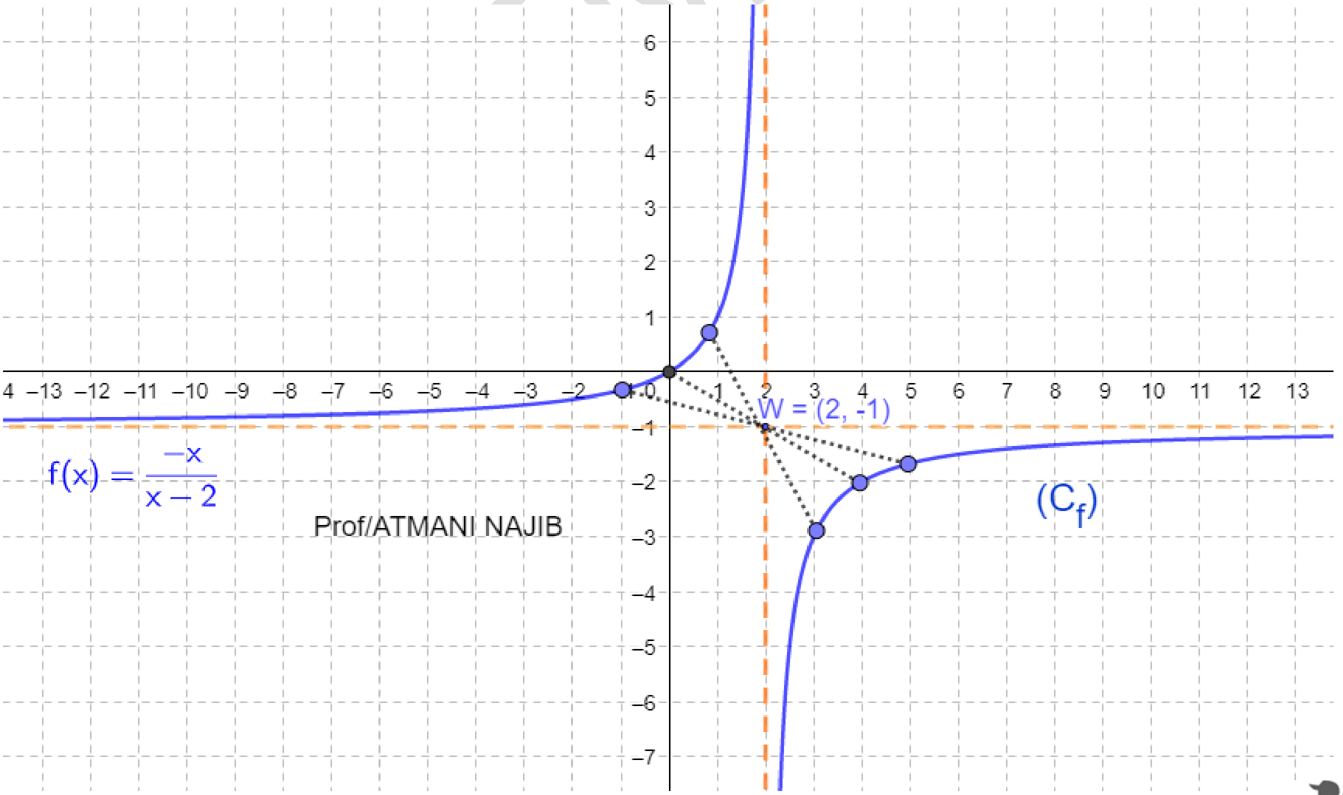
4) $k=-2<0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Methode2 : $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\succ 0$ donc : g est strictement croissante sur : $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$

<u>4) Représentation graphique</u>

-1	0	1	2	3	4	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien