Correction : Devoir surveillé n°5/S sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice01 : $3,5pts(1pts+1pts+1,5pts)$ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{-x+8}{4x^2-9}$ 2) $f(x)=\dfrac{|2x-5|}{|x|-2}$. 3) $f(x)=\sqrt{-2x(x-2)(x^2-8x+16)}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{-x+8}{4x^2-9}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x^2-9\neq 0\right\}$ signifie que : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x^2\neq 9\right\}$

Signifie que : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2\neq\dfrac{9}{4}\right\}$ signifie que : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq-\sqrt{\dfrac{9}{4}}\ \ et\ \ x\neq\sqrt{\dfrac{9}{4}}\right\}$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq-\dfrac{3}{2}\ \ et\ \ x\neq\dfrac{3}{2}\right\}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{|2x-5|}{|x|-2}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\right\}$

$|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

3) $f(x)=\sqrt{-2x(x-2)(x^2-8x+16)}$; $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-2x(x-2)(x^2-8x+16)\geq 0\right\}$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x-2=0$ ou $x=0$

Signifie que : $x^2-8x+16=0$ ou $x=2$ ou $x=0$

Pour déterminer le signe du trinôme : $x^2-8x+16$

Calculons son discriminant : $a=1$; $b=-8$; $c=16$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-8)^2-4\times1\times16=64-64=0$

Comme : Le coefficient principal est : $a=1>0$ et $\Delta=0$, alors : $x^2-8x+16\geq 0$

La racine double est : $x_1=\dfrac{8}{2\times1}=4$

$-2x(x-2)(x^2-8x+16)=0$ Signifie que : $x=4$ ou $x=2$ ou $x=0$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-8x+16$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-2x(x-2)(x^2-8x+16)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Par suite : $D_f=[0;2]$

Exercice 02 : $6,5pts(0,5pts+1pts+1,5pts+1pts+1pts+1,5pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$ et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère

1) Déterminer D_f .

2) Montrer que la fonction f est impaire

3) Calculer $f(-1)$ et Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I=[0;1]$ et $J=[1;+\infty[$.

5) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) $D_f=\{x\in E/f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+1 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{-10(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{-10x}{x^2+1}$ Donc : $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) Calculons $f(-1)$: $f(-1)=\frac{-10\times(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{10}{2}=5$

Montrons que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$: Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-5=\frac{-10x}{x^2+1}-5=\frac{-10x-5(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-10x-5x^2-5}{x^2+1}=-5\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-5\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Puisque : $-5\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\leq 0$ alors : $f(x)\leq 5$ et on a aussi : $f(-1)=5$

Alors : $f(x)\leq f(-1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

On conclut que : $f(-1)=5$ est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-10x_1}{x_1^2+1}+\frac{10x_2}{x_2^2+1}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-10x_1(x_2^2+1)+10x_2(x_1^2+1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}{x_1-x_2}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{-10x_1\left(x_2^2+1\right)+10x_2\left(x_1^2+1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{-10x_1x_2^2-10x_1+10x_2x_1^2+10x_2}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{10\left(-x_1x_2^2-x_1+x_2x_1^2+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10\left(x_2-x_1+x_1x_2\left(x_1-x_2\right)\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{10\left(x_1x_2\left(x_1-x_2\right)-\left(x_1-x_2\right)\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10\left(x_1-x_2\right)\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{10\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}$$

b)

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=\left[0;1\right]$

Soient : $x_1\in\left[0;1\right]$ et $x_2\in\left[0;1\right]$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)>0$ et $10>0$

Donc : $\begin{cases}0\leq x_1\leq 1\\0\leq x_2\leq 1\end{cases}$ alors : $0\leq x_1x_2\leq 1$

Donc : $x_1x_2-1\leq 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $0\leq x_1x_2<1$

D'où : $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{10\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $I=\left[0;1\right]$

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J=\left[1;+\infty\right[$

On a : $\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)>0$ et $10>0$

Soient : $x_1\in\left[1;+\infty\right[$ et $x_2\in\left[1;+\infty\right[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases}x_1\geq 1\\x_2\geq 1\end{cases}$ alors : $x_1x_2\geq 1$

Donc : $x_1x_2-1\geq 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $x_1x_2-1>0$

D'où : $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{10\left(x_1x_2-1\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}>0$

Et par suite f est strictement croissante sur $J=\left[1;+\infty\right[$

5) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

On a f est une fonction impaire

▹ Puisque f est strictement décroissante sur $I=\left[0;1\right]$ alors f l'est aussi sur $I'=\left[-1;0\right]$

▹ Puisque f est strictement croissante sur $J=\left[1;+\infty\right[$ alors f l'est aussi sur $J'=\left]-\infty;1\right]$

D'où, le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

Exercice03 :

$10\,pts(1pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+1,5pts+1pts+1,5pts+1pts+1pts)$

Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) a) Vérifier que : $f(x)=-(x+1)^2+4$ si $x\in D_f$

b) Vérifier que : $g(x)=1-\frac{3}{x+2}$ si $x\in D_g$

3)a) Donner la nature de la courbe de f et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de f
4)a) Donner la nature de la courbe de g et ces éléments caractéristique
b) Dresser le tableau de variation de g
5)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses
b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

6)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

7)a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Solution : 1) $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$

Dans l'expression de $f(x)$, x peut prendre n'importe quelle valeur réelle

Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+2=0$ soit $x=-2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

2) a) Vérifions que : $f(x)=-(x+1)^2+4$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=-x^2-2x+3=-(x^2+2x)+3=-(x^2+2x+1^2-1^2)+3=-((x+1)^2-1)+3=-(x+1)^2+1+3=-(x+1)^2+4$

Donc : $f(x)=-(x+1)^2+4$ (la forme canonique)

b) Vérifions que : $g(x)=1-\frac{3}{x+2}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$; $1-\frac{3}{x+2}=\frac{1(x+2)-3}{x+2}=\frac{x+2-3}{x+2}=\frac{x-1}{x+2}=g(x)$ (La forme réduite)

3)a) On utilisant un résumé de notre cours :
Rappelle : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (forme canonique)

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Dans notre exercice on a : $f(x)=-(x+1)^2+4$ (la forme canonique) : $\alpha=1$ et $\beta=4$

Dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$ c'est-à-dire : $W(-1;4)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-\alpha=1$

b) Le tableau de variations de f :

Dans notre exercice on a : $-\alpha=-1$ et $\beta=4$ et $a=-1<0$*

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$\nearrow$	4	$\searrow$

4)a) On utilisant un résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $g(x)=1-\dfrac{3}{x+2}$ si $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ donc : $\alpha=2$ et $\beta=1$ et $k=-3<0$

Donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-2$ et $y=1$

b)Et puisque : $k=-3<0$ alors : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$

<u>Donc le tableau de variations de g</u> :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	||	$\nearrow$

5)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3=0$ $\quad\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$

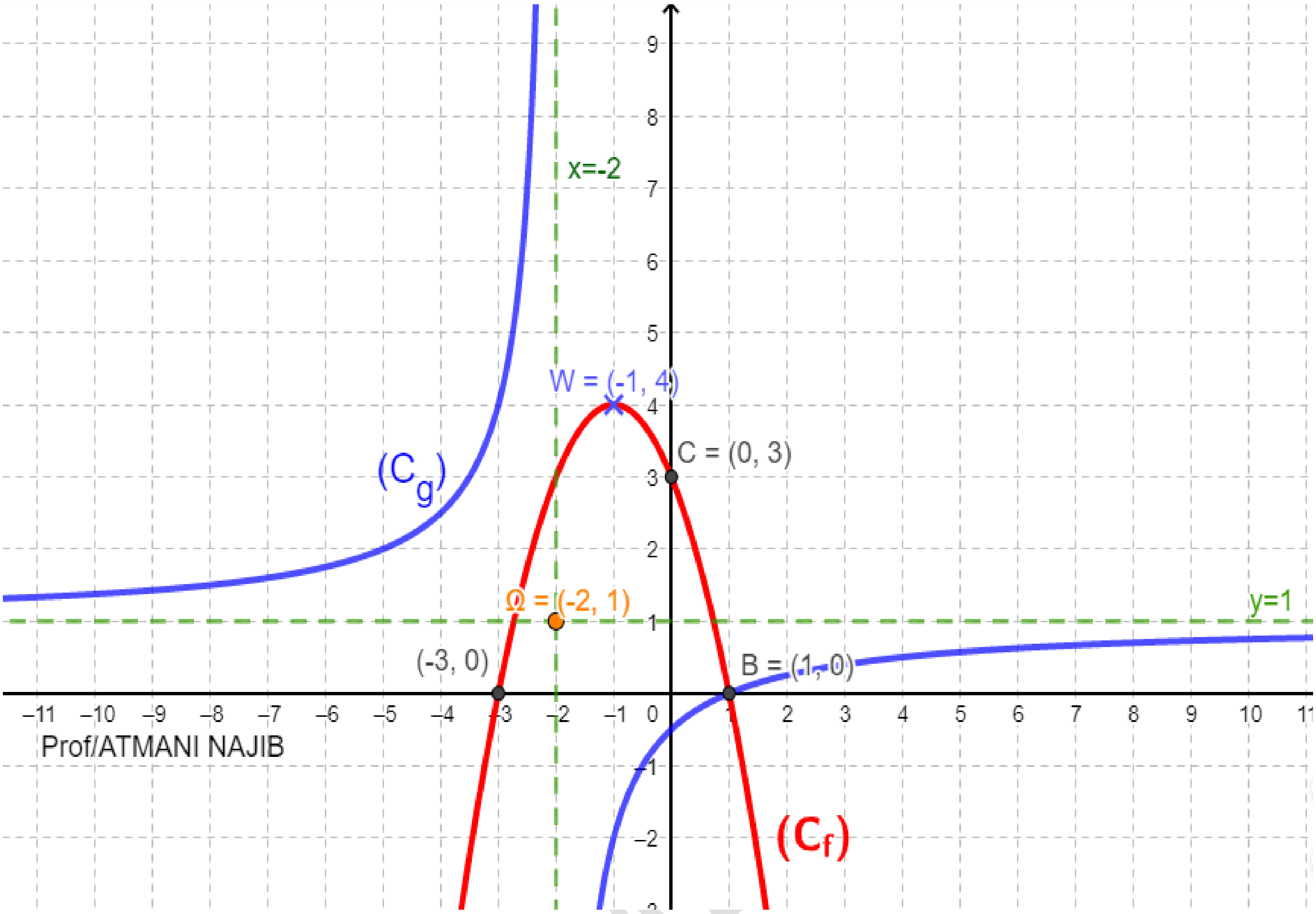
Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A(-3;0)$ et $B(1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

<u>6)Représentation graphique : Les</u> courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



7) a) Résolution graphique de l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$

On a donc : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

7)b) Résolution graphique de l'inéquation $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$:

La courbe $\left(C_f\right)$ est au-dessus de $\left(C_g\right)$ si $x\in\left]-2;1\right]$ Donc $S=\left]-2;1\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien