Correction : Devoir surveillé n°5/T sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice 01 : $4pts(1pts \times 4)$; Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$. 2) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$. 3) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ 4) $f(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x+1}$

Solutions : 1) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ Signifie $x(x^2-2)=0$ Équivaut à: $x=0$ ou $x^2-2=0$ c'est-à-dire : $x=0$ ou $x^2=2$

Signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

2) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$: $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

3) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $a=2$ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

4) $f(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\sin x+1\neq 0\}$

$2\sin x+1=0$ Signifie $\sin x=-\frac{1}{2}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ Signifie $\sin x=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Signifie $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Signifie $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Signifie $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice03 : $5,5pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts+0,5pts+0,5pts)$

Soit f une fonction tel que : $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f

Tel que : $x_1\neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I=]0;1]$ puis sur $J=[1;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Solutions : 1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x\neq 0$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$$=\frac{x^2{}_1\times x_2+x_2-x^2{}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a) Sur $I=]0;1]$; Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$ Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $x_1x_2-1\prec 0$ et on a : $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

D'où : f est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b) Sur $J=[1;+\infty[$: Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$.

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ par suite : $x_1x_2-1\succ 0$

Et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Puisque : f est strictement décroissante sur I alors f est strictement décroissante sur I'

Puisque : f est strictement croissante sur J
alors f est strictement croissante sur J'
5) par suite le tableau de variations de f sur D_f
est : $f(x)=1+\frac{1}{1}=2$; $f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ ‖ $\searrow$	2	$\nearrow$

Exercice04 :
$10,5pts(1pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+0,5pts+1,5pts+1,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=-x^2+4x+3$ et $g(x)=2x$

1)a) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ ($f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

b) Déterminer la nature de la courbe représentative (C_f)de f et ces éléments caractéristiques.

c) Déterminer le Tableau de variations de f

2)a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le 7$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ on a : $\frac{27}{4}\le f(x)\le 7$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-1;2]$ on a : $-2\le f(x)\le 7$

3)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f)avec les axes du repère

4)Tracer Les courbes représentatives de(C_f)et(C_g)

5) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

6) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)>0$

7) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)>g(x)$

8) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec :$m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=-x^2+4x+3$

1)a) f est une fonction polynôme donc :$D_f=\mathbb{R}$

Déterminons la forme canonique de $f(x)$ ($f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

Méthode1 : $f(x)=-1(x^2-4x)+3=-1(x^2-2\times x\times 2+2^2-2^2)+3$

$f(x)=-1\left((x-2)^2-4\right)+3=-1(x-2)^2+4+3$

Donc : la forme canonique de $f(x)$ est $f(x)=-1(x-2)^2+7$ par suite : $\alpha=-2$; $\beta=7$ et $a=-1$

Méthode2 : $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$ On a :$a=-1$ et $b=4$ et $c=3$

Donc $\alpha=\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times(-1)}=-2$ et $\beta=f(-\alpha)=f(2)=-2^2+4\times 2+3=-4+8+3=7$

Donc : $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta=-1(x-2)^2+7$

b) la courbe(C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)$;$W(2;7)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$. C'est-à-dire : $x=-1$

c)Le Tableau de variations de f : On a $a=-1\prec 0$
Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$

2)a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(2)=7$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq f(2)$

Par suite : $f(x)\leq 7$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ alors : $2\leq x\leq\frac{5}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I=[2;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[2;\frac{5}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{5}{2}\right)\leq f(x)\leq f(2)$ et comme : $f(2)=7$ et $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4\times\frac{5}{2}+3=-\frac{25}{4}+10+3=13-\frac{25}{4}=\frac{27}{4}$

Par suite : $\frac{27}{4}\leq f(x)\leq 7$

b) Soit : $x\in[-1;2]$ On a alors : $-1\leq x\leq 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J=]-\infty;2]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;2]$

Alors : $f(-1)\leq f(x)\leq f(2)$ et comme : $f(-1)=-(-1)^2+4\times(-1)+3=-2$ Et $f(2)=7$

Par suite : $-2\leq f(x)\leq 7$

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times 3=16+12=28>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{7}\right)}{-2}=2-\sqrt{7}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{7}\right)}{-2}=2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{7};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{7};0\right)$

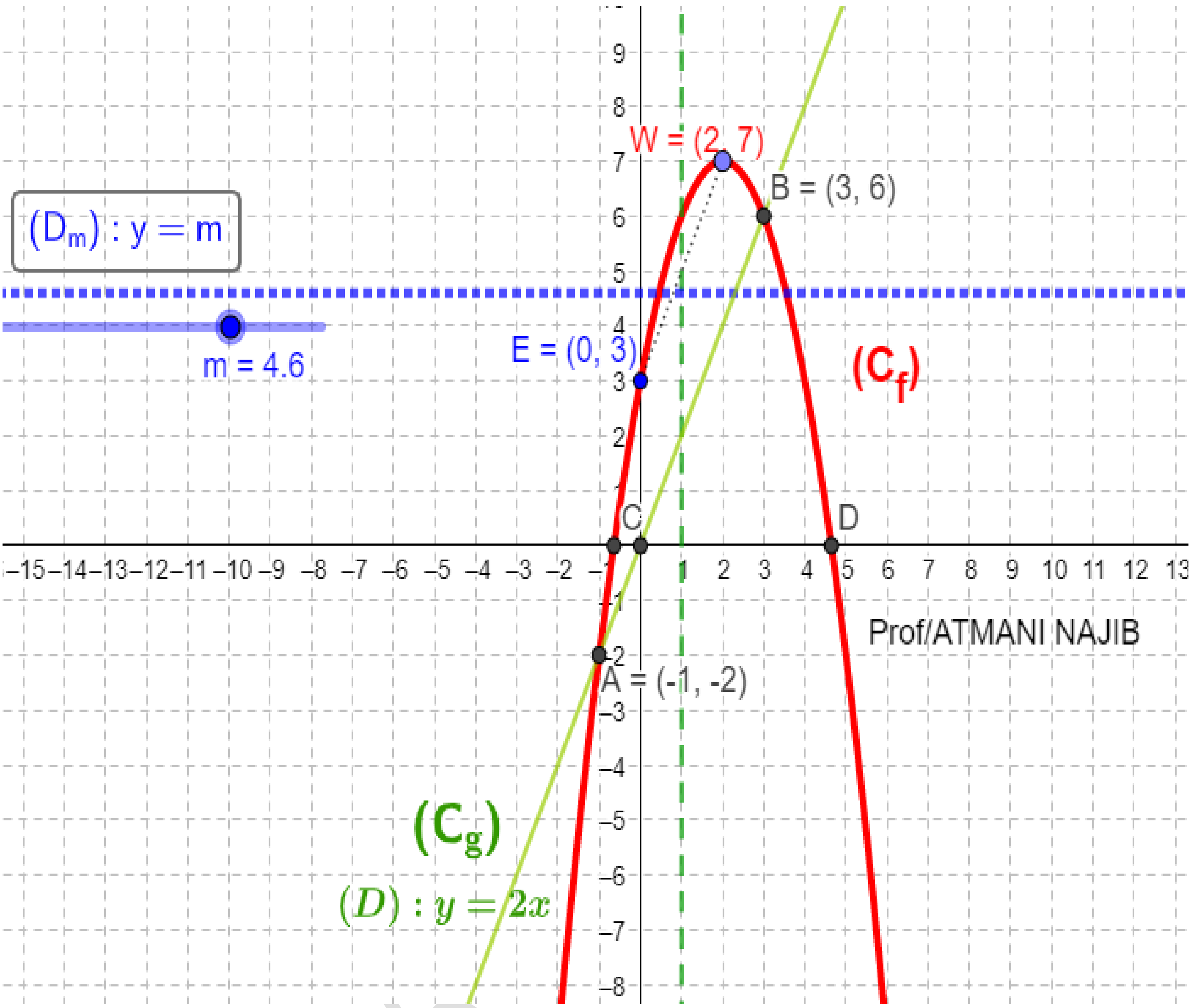
b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=-0^2+4\times 0+3=3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

4) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :



5) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -1$ et $x = 3$ donc $S = \{-1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 + 4x + 3 = 2x$ c'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = -1$; $b = 2$ et $c = 3$; $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$

Donc : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$

Donc : $S = \{-1;3\}$

6) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > 0$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (Ox) si $x \in \left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

Donc $S = \left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)>0$: $f(x)>0$ Signifie $-x^2+4x+3>0$

Les racines sont : $x_1=2-\sqrt{7}$ et $x_2=2+\sqrt{7}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$-x^2+4x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

7) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)>g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-1;3\right[$

Donc $S=\left]-1;3\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $f(x)>g(x)$:

$f(x)>g(x)$ Signifie $-x^2+4x+3>2x$

C'est-à-dire : $-x^2+2x+3>0$

Les racines sont : $x_1=-1$ et $x_2=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S=\left]-1;3\right[$

8) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m>7$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=7$ il y'a une solution c'est : x = 2
Si : $m<7$ il y'a deux solutions

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien