Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveillé n°5 /U sur : FONCTIONS - Généralités

Exercice 01 : $4,5pts(1pts+1pts+1pts+1,5pts)$

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f(0)$; $f(-3)$

c) Déterminer les antécédents de 1 par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+24}$ Montrer que : $f=g$

Solution : 1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4+x\geq 0 \quad et \quad 6-x\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -4 \ et \ x\leq 6\}$ Donc $D_f=[-4,6]$

b) Calcul des images :

$f(0)=\sqrt{4+0}\times\sqrt{6-0}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ et $f(-3)=\sqrt{4-3}\times\sqrt{6+3}=\sqrt{1}\times\sqrt{9}=3$

c) x est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0$ Équivaut à : $(4+x)(6-x)=1$ Équivaut à : $24-4x+6x-x^2=1$

Équivaut à : $-x^2+2x+23=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+4\times(-23)=4+92=96>0$. $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{96}}{2\times-1}=\dfrac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{96}}{2\times-1}=\dfrac{2+\sqrt{96}}{2}$

Finalement les antécédents de 1 par f sont : $\dfrac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $\dfrac{2+\sqrt{96}}{2}$

4) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+24}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+2x+24\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 24\times -1=4+96=100>0$

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{100}}{2\times-1}=\dfrac{8}{-2}=-4$ et $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{100}}{2\times-1}=\dfrac{-12}{-2}=6$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$-x^2+2x+24$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g=[-4,6]$

On a donc : $D_f=D_g$.

$f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=\sqrt{(4+x)(6-x)}=\sqrt{-x^2+2x+24}=g(x)$

Conclusion : $f=g$

Exercice 04 : $6pts(0,5pts+1pts+0,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit la fonction f définie par : $f(x)=-\dfrac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) a) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

b) Donner une interprétation graphique

3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) Calculer : $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$

5) Dresser son tableau de variation sur D_f

6) Tracer la courbe (C_f) dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Solution :1) Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2)a) - Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=-\frac{1}{2}\left(|-2x+3|+|-2x-3|\right)=-\frac{1}{2}\left(|-(2x-3)|+|-(2x+3)|\right)$

$f(-x)=-\frac{1}{2}\left(|2x-3|+|2x+3|\right)$ Car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Donc : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

b) Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative

3) $f(x)=-\frac{1}{2}\left(|2x+3|+|2x-3|\right)$

Si $x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ alors : $0\le x\le\frac{3}{2}$

Donc : $0\le 2x\le 3$ c'est-à-dire : $2x-3\le 0$ et on a : $2x+3\ge 0$

Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}\left(2x+3+\left(-(2x-3)\right)\right)=-\frac{1}{2}(2x+3-2x+3)=-3$

Si $x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ alors : $x\ge\frac{3}{2}$

Donc : $2x\ge 3$ c'est-à-dire : $2x-3\ge 0$ et on a : $2x+3\ge 0$

Par suite : $f(x)=-\frac{1}{2}\left(|2x+3|+|2x-3|\right)=-\frac{1}{2}\left(2x+3+|2x-3|\right)=-\frac{1}{2}(4x)=-2x$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x)=-3 \ si \ x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right] \\ f(x)=-2x \ si \ x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\end{cases}$

4) $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\left|2\times\frac{3}{2}+3\right|+\left|2\times\frac{3}{2}-3\right|\right)=-\frac{1}{2}(6+0)=-3$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-3$ Car :f est une fonction paire

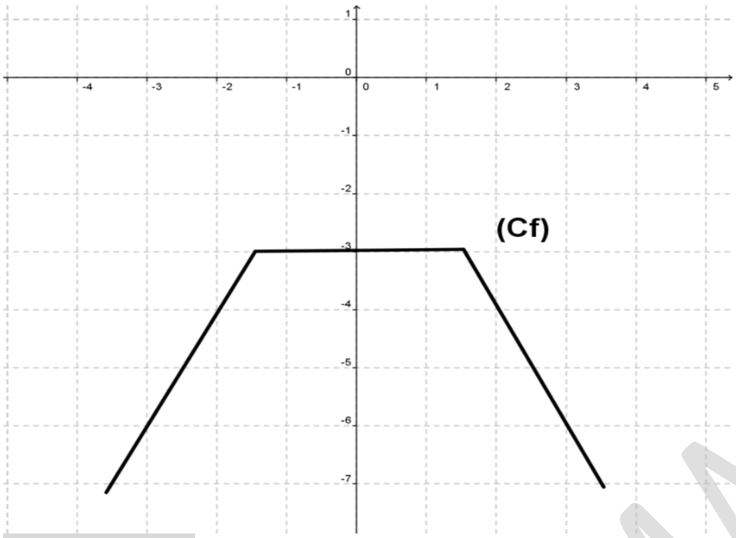
5) le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

On a : f est constante sur l'intervalle : $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et décroissante dans : $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Et puisque f est une fonction paire alors f est constante sur l'intervalle : $I' = \left[-\frac{3}{2};0\right]$ et f est croissante dans $J' = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\longrightarrow -3 \longrightarrow$	-3	$\searrow$

6) La courbe (C_f) :



Exercice 06 :

$10,5pts(1pts+0,5pts+1pts+0,5pts+0,5pts+1pts+1pts+1pts+1,5pts+0,5pts+1pts+1pts)$

Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{1}{2-x}$ et (C_g) La courbe représentative de g

1) a) Déterminer la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer le tableau de variation de g

c) Tracer la courbe (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $g(x)=x$ et $g(x)=1+x$

b) Donner une interprétation graphique des résultats

c) Déterminer le signe de : m^2+4m

d) Déterminer les valeurs de m ou la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points

3) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$

a) Déterminer D_f

b) Montrer : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ $si\ x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

c) En déduire la monotonie de f dans : $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

d) Calculer : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis en déduire que $-\frac{2}{3}\leq f(x)$; si $x\in\mathbb{R}$

e) Montrer que : si $x \in \mathbb{R}$ alors : $-\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$

Solution : 1) a) Déterminons la nature de (C_g) et ses éléments caractéristiques : $g(x) = \frac{1}{2-x}$

On a $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

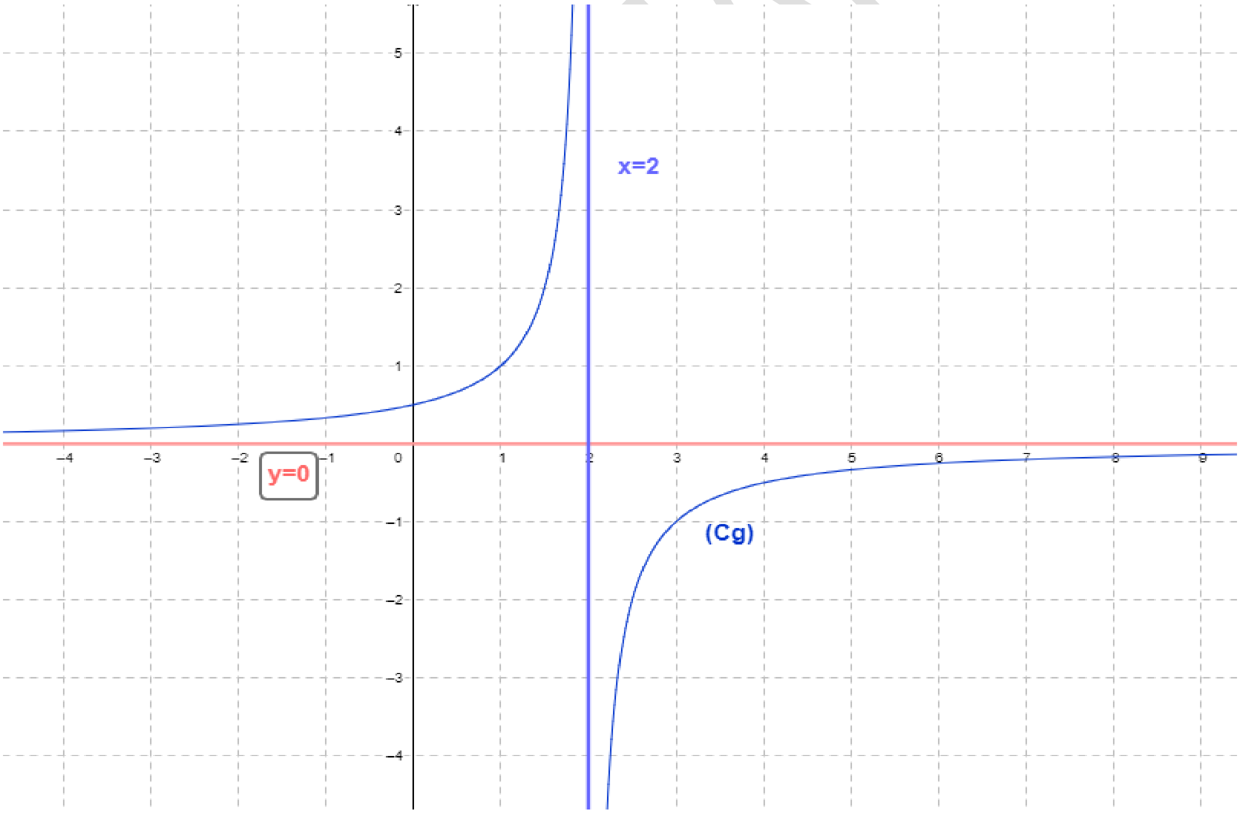
En générale si : $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $c \neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $g(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{0x+1}{(-1)x+2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $W(2;0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=2$ et $y=0$

b) $g(x) = \frac{1}{2-x}$ on a : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \succ 0$ g est strictement croissante sur les intervalles :

$]2\ ;\ +\infty[$ et $]-\infty\ ;\ 2[$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$	
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$



2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations : $g(x) = x$ et $g(x) = 1+x$

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = x \Leftrightarrow x(2-x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Donc : $S_1 = \{1\}$

$g(x)=1+x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x}=1+x \Leftrightarrow (1+x)(2-x)=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1^2+4=5>0$ et $x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Donc : $S_2=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) interprétation graphique des résultats :

• Pour l'équation : $g(x)=x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x$ en un point c'est : $A(1;1)$

• Pour l'équation : $g(x)=1+x$

La courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+1$ en deux points : $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$ et

$C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

c) Détermination du signe de : m^2+4m

m	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$m2+4m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Détermination des valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points : Résolution algébrique de l'équation $g(x)=x+m$

$g(x)=x+m \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}=x+m \Leftrightarrow 2m+2x-x^2-xm=1 \Leftrightarrow x^2+(m-2)x-2m+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4\times1\times(-2m+1)=m^2+4m$

Donc : $\Delta=m^2+4m>0$ signifie que : $m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

Donc : l'équation $g(x)=x+m$ admet 2 solutions si et seulement si : $m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

Donc : les valeurs de m pour que la courbe (C_g) coupe la droite d'équation : $y=x+m$ en deux points sont : $m\in]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

3) On considère la fonction f tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$

a) Détermination de D_f

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2-x+1\neq 0\}$

Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f=\mathbb{R}$

b) Calculons : $f(x)-f(y)$ $si\ x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$f(x)-f(y)=\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{2y}{y^2-y+1}=\frac{2x(y^2-y+1)-2y(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy^2-xy+x-yx^2+xy-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

$$=2\frac{xy^2-yx^2+x-y}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2\frac{xy(y-x)-(y-x)}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}=2(y-x)\frac{xy-1}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$$

Donc : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

c) En déduire la monotonie de f dans: $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$

On a : $f(x)-f(y)=2(x-y)\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$ donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\frac{1-xy}{(x^2-x+1)(y^2-y+1)}$

Pour : x^2-x+1 et y^2-y+1 ; $\Delta=1-4\prec 0$ donc : $x^2-x+1\succ 0$ et $y^2-y+1\succ 0$

Si : $x\in[-1;1]\Rightarrow -1\leq x\leq 1\Rightarrow |x|\leq 1\quad (1)$ et $y\in[-1;1]\Rightarrow -1\leq y\leq 1\Rightarrow |y|\leq 1\quad (2)$

(1) et $(2)\Rightarrow |x||y|\leq 1\Rightarrow |xy|\leq 1\Rightarrow -1\leq xy\leq 1\Rightarrow 0\leq 1-xy$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\geq 0$ par suite f est croissante sur $[-1;1]$

Si : $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\geq 1\quad (1)$ et $y\in[1;+\infty[\Rightarrow y\geq 1\quad (2)$

(1) et $(2)\Rightarrow xy\geq 1\Rightarrow 1-xy\leq 0$

Donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq 0$ par suite f est décroissante sur $[1;+\infty[$

d) Calcul de : $f(x)+\frac{2}{3}$ puis l'étude de son signe :

$$f(x)+\frac{2}{3}=\frac{2x}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}=\frac{6x+2x^2-2x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2x^2+4x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x^2+2x+1)}{3(x^2-x+1)}=\frac{2(x+1)^2}{3(x^2-x+1)}\geq 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x+1)^2\geq 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+\frac{2}{3}\geq 0$ c'est-à-dire : $-\frac{2}{3}\leq f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

e) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ -\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

On a : $-\frac{2}{3}\leq f(x)$ ❶ ; $\forall x\in\mathbb{R}$. Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)\leq 2$

$$2-f(x)=2-\frac{2x}{x^2-x+1}=2\left(1-\frac{x}{x^2-x+1}\right)=2\frac{x^2-x+1-x}{(x^2-x+1)}=2\frac{x^2-2x+1}{(x^2-x+1)}=\frac{2(x-1)^2}{(x^2-x+1)}\geq 0$$

Car : $x^2-x+1\succ 0$ et $(x-1)^2\geq 0$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $2-f(x)\geq 0$ c'est-à-dire : $f(x)\leq 2$ ❷ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

❶ et❷ $\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$; $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien