Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/A sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : $4,5pts(2pts+1pts+1,5pts)$ Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$

Soit I le milieu du segment $[CD]$ et J un point tel que : $ACJD$ est un parallélogramme

On considère la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ de vecteur $\overrightarrow{AD}$

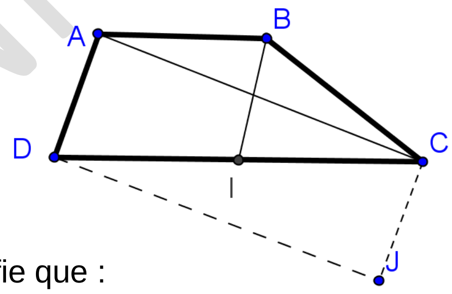
1) Déterminer les images des points A et C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

3) En déduire que : $(IJ)||(BC)$

Solution : 1) Déterminons les images des points A et C Par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

$\bullet$Déterminons $t_{\overrightarrow{AB}}(A)$?



Soit A' est l'image du point A par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

Cela signifie que : $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}$ c'est-à-dire $A'=D$

Donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(A)=D$

$\bullet$Déterminons $t_{\overrightarrow{AD}}(C)$?

Soit C' est l'image du point C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ cela signifie que :

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD}$

Et puisque : $ACJD$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CJ}$

Alors : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CJ}$ c'est-à-dire $C'=J$ donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=J$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

On a : $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ et I le milieu du segment $[CD]$ donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DI}$ Par suite $ABID$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AD}$ et par suite : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

3) déduction que : $(IJ)||(BC)$?

Puisque : $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=J$ et $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$ d'après la propriété caractéristique de la translation on a :

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IJ}$ et par suite : $(IJ)||(BC)$

Exercice05 : $4,5pts(2pts+0,5pts+1pts+1pts)$

Soit ABC un triangle et soient les points M et N tels que :

$\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $5\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{CN}=\vec{0}$; On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $k=-\frac{1}{4}$

1) Montrer que : $h(B)=M$ et $h(C)=N$

2) Faite une figure

3) Montrer que : $BC=4MN$

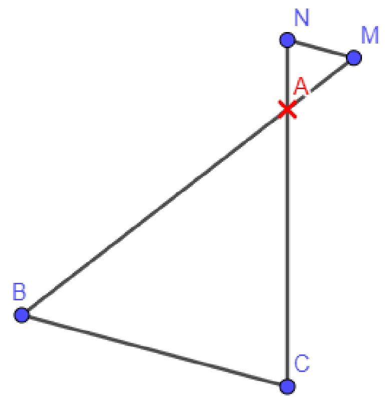
4) Montrer que : $(MN) \parallel (BC)$

Solution : 1) a) Montrons que : $h(B)=M$

On a : $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ceci signifie que l'image de B par l'homothétie h est M

C'est-à-dire : $h(B)=M$

b) Montrons que : $h(C)=N$; Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



On a : $5\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{CN}=\vec{0}$ donc : $5\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AC}$

Donc : $4\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ Par suite : $h(C)=N$

2) La figure

3) Montrons que : $BC=4MN$

On a : $\begin{cases} h(B)=M \\ h(C)=N \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\left\|-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $MN=\left|-\frac{1}{4}\right|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $MN=\frac{1}{4}BC$ c'est-à-dire : $BC=4MN$

4) Montrons que : $(MN) \parallel (BC)$

On a : $\begin{cases} h(B)=M \\ h(C)=N \end{cases}$ donc : $h((BC))=(MN)$

Et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

Donc : $(MN) \parallel (BC)$

Exercice12 : $6pts(1,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts+0,5pts)$

Soit ABC un triangle tel que : AB = $\sqrt{7}$ et AC= 2 et BC= 3 ; I Le milieu du segment $[BC]$

1) a) Calculer : $\cos(B\hat{A}C)$

b) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

c) Calculer AI

2) Soit M un point tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) Montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

c) Que peut-on déduire des droites : (MB) et (AC) ?

Solution : 1) a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos A$

Donc : $9=4+7-4\times\sqrt{7}\times\cos A$

Donc : $-2=-4\times\sqrt{7}\times\cos A$ donc : $\cos A=\frac{2}{4\times\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}^2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$

1)b) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=2\times\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{14}=\frac{14}{14}=1$

1)c) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Par suite : $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

Donc : $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ c'est-à-dire : $AI^2=\frac{13}{4}$ par suite : $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

2)a)
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

2)b) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$$

2)c) Donc : $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MB)\perp(AC)$

Exercice14 : $5pts(2pts+2pts+1pts)$ $ABCD$ un trapèze de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ qui se coupent en I et soit S un point de l'espace qui n'appartient pas au plan (ABC) et tel que : $(SI)\perp(ABC)$

1) Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD) et l'intersection des plans (SAB) et (SDC)

2) Vérifier que $(SI)\perp(AB)$ et montrer que les plans (SAC) et (ABC) sont orthogonaux

3) On suppose que ABC est un triangle rectangle en B et que :

$SI=3$ et $BC=\frac{1}{4}$; $AB=2$ et $CD=3$

Calculer alors le volume de la pyramide $SABCD$

Solution : 1) a)

On a : $(SAC)\neq(SBD)$ (1) car les points : S ; A ; B ; C ; D sont non coplanaires

On a : $S\in(SAC)$ et $S\in(SBD)$ (2)

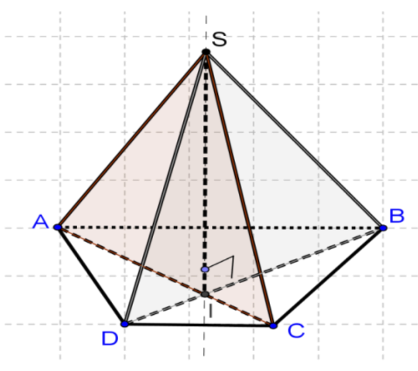
On a aussi : $I\in(AC)$ et $(AC)\subset(SAC)$

Donc : $I\in(SAC)$

On a aussi : $I\in(BD)$ et $I\in(BD)$ donc : $I\in(SBD)$

Donc : $I\in(SAC)$ et $I\in(SBD)$ (3)

De (1) ; (2) et (3) en déduit que : $(SAC)\cap(SBD)=(IS)$



b) On a : (SAB) et (SDC) sont non confondus

Et $S\in(SAB)$ et $S\in(SDC)$

Et puisque : $(AB)\subset(SAB)$ et $(DC)\subset(SDC)$ et $(DC)\parallel(AB)$ alors d'après le théorème du toit

Les plans (SAB) et (SDC) se coupent suivant une droite qui passe par S et parallèle aux droites (AB) et (DC)

2)a) On a : $(SI)\perp(ABC)$ et $(AB)\subset(ABC)$

Donc : $(SI)\perp(AB)$

b) On a : $(SI)\subset(SAC)$ et $(SI)\perp(ABC)$

Par suite : $(ABC)\perp(SAC)$

3) On a : $((AB)\perp(BC))$ donc la surface du trapèze $ABCD$ est :

$$S=\frac{(DC+AB)\times BC}{2}=\frac{(3+2)\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}$$ (Car (BC) est une hauteur)

Et le volume : $V=\frac{1}{3}\cdot S\times(SI)$ de la pyramide $SABCD$ est : $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)\cdot 3=\frac{5}{8}$ (unité)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien