Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/B sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $4,5pts(0,5pts+1,5pts+1pts+1,5pts)$

Soit ABC un triangle et $I\in[BC]$ tel que : $I\neq B$ et $I\neq C$

Et soit G le point tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

1) Faite une figure

2)On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=G$

a) Montrer que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

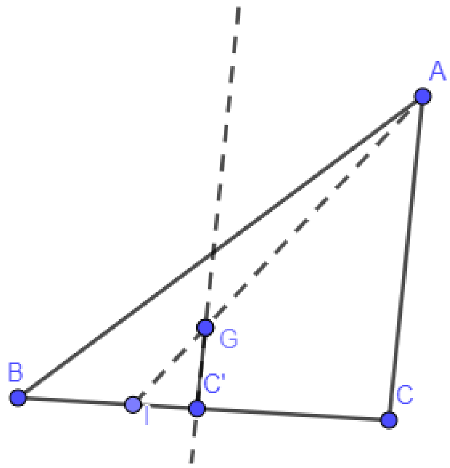
b) Déterminer l'image de la droite (BC) par l'homothétie h.

Justifier votre réponse.

c) Déterminer l'image de la droite (AC) par l'homothétie h.

Puis construire le point C' tel que : $h(C)=C'$

Solution :1) La figure



2)On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=G$

a) Montrons que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

On a : $h(A)=G$ donc : $\overrightarrow{IG}=k\overrightarrow{IA}$

D'autre part, on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$ donc : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

Donc : $\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{IG}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}$

Donc : $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ Ce qui signifie que le rapport de l'homothétie est $k=\frac{1}{4}$

b) Déterminons l'image de la droite (BC) par l'homothétie h.

On a : $I\in(BC)$ donc : $h((BC))=(BC)$

c) Déterminons l'image de la droite (AC) par l'homothétie h.

On a : $h(A)=G$ donc : $h((AC))$ est la droite qui passe par G est parallèle (AC)

On a : $h(C)=C'$ donc : C' appartient à la droite qui passe par G est parallèle (AC)

et $C'\in h((BC))=(BC)$ appartient à la droite qui passe par G est parallèle (AC)

Donc : C' est le point d'intersection des droites (BC) et la droite qui passe par G est parallèle a (AC)

Exercice02 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$

Soit deux points A et B du plan et soit h une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$

1) Déterminer les points invariants par la transformation h

2)Montrer que : h est une homothétie et trouver le centre et le rapport k de cette homothétie

Solution :1) Déterminons les points invariants par la transformation h

Soit Ω un point invariant par la transformation h

Ω un point invariant par la transformation h signifie que : $h(\Omega)=\Omega$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega\Omega}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\left(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}\right)+\vec{0}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $-\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$

Donc : le point invariant par la transformation h vérifie : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$

2)Montrons que : h est une homothétie

Soit M un point du plan et $h(M)=M'$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}-\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$

Équivaut à : $\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)-2\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)-\left(\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{M'\Omega}-2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}+\left(\overrightarrow{\Omega A}-2\overrightarrow{\Omega B}\right)-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ et puisque : $\overrightarrow{A\Omega}=2\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{A\Omega}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{M'\Omega}-\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{\Omega M'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

Cela veut dire que : h est une homothétie de centre Ω et de rapport $k=\frac{1}{2}$

Exercice03 : $7,5pts(2pts+1pts+1,5pts+1pts+2pts)$

Soit ABC un triangle tel que : $AB=1$

Et $AC=\sqrt{2}$ et $CB=2$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$

2) Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle ABD

4) Calculer : AD

5) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Calculer : AI et BJ

Solution : 1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

Et on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $2^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $4=1+2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ donc : $1=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

Déduction de $\cos A$: on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $-\frac{1}{2}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ donc : $-\frac{1}{2}=1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$

Donc : $\cos\hat{A}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ssi $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$ donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$$

Donc : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ par suite : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

Et donc : ABD est un triangle rectangle en A

4) On a : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$ donc : $AD^2=\frac{1}{9}\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(2\overrightarrow{AC}\right)^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{9}\left(AB^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)$

$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times 2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$ Par suite : $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5) a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

Signifie que : $3=2AI^2+2$ ssi $1=2AI^2$ donc : $AI^2=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$

Donc : $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$ c'est-à-dire : $5=2BJ^2+1$

Signifie que : $BJ^2=2$ et par suite : $BJ=\sqrt{2}$

Exercice04 : $5pts(1pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace et soient I ; J et K et L les milieux respectifs des Segments : $[AB]$; $[EF]$; $[GH]$; $[GH]$ et $[BC]$

1) Montrer que :les points B ; C ; K et J sont coplanaires

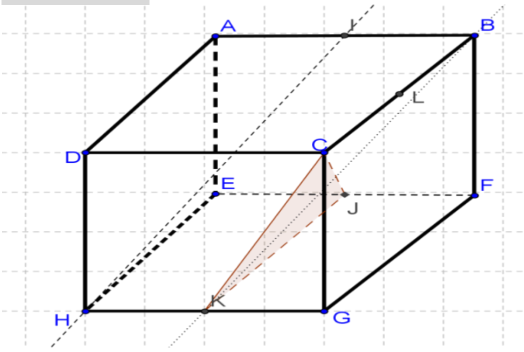
2) Montrer que :les points I ; B ; K et H sont coplanaires

3) Est ce que les points I ; L ; E et B sont coplanaires ? Justifier

4)Montrer que : $(IH) \parallel (KB)$

5) En déduire que : $(IH) \parallel (JKC)$

Solution :



1) Dans le carré $EFGH$ on a : I le milieu du segment $[AB]$ et K le milieu du segment $[GH]$

Donc : $(EH) \parallel (JK) \parallel (FG)$

Et on sait que : $(FG) \parallel (BC)$ donc : $(JK) \parallel (BC)$

Par suite les points B ; C ; K et J sont coplanaires

2)On a : $(AB) \parallel (EF)$ et $(EF) \parallel (HG)$

Donc : $(AB) \parallel (HG)$

Par suite les points : I ; B ; K et H sont coplanaires

3) Est ce que les points I ; L ; E et B sont coplanaires ? Justifier

On a : $I \in [AB]$ et $L \in [BC]$

Donc : $I \in (ABCD)$ et $L \in (ABCD)$

Et puisque : $E \notin (ABCD)$

Alors les points I ; L ; E et B ne sont pas coplanaires

4) On a : $AB = HG$ et I le milieu du segment $[AB]$ et K le milieu du segment $[GH]$

Donc : $IB = HK$ et on sait que : $(IB) \parallel (HK)$ donc $IBKH$ est un parallélogramme

Et par suite : $(IH) \parallel (KB)$

5) On sait que les points B ; C ; K et J sont coplanaires

Et puisque $(IH) \parallel (BK)$ et $(BK) \subset (JCK)$ donc : $(IH) \parallel (JKC)$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien