Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/C sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $3pts(1pts+0,5pts+1,5pts)$

Soient trois points fixes A ; B et C du plan

Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

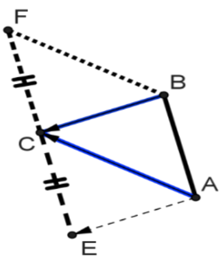
1) Montrer que : E est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

2)a) Faire une figure

b) Représenter le point : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Et Montrer que : C est le milieu $[EF]$

Solution : 1) On a : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ Signifie que : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$



Signifie que : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire $BCEA$ est un parallélogramme

Par suite : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=E$

2)a) la figure

On a : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ donc :

$t_{\overrightarrow{AC}}(B)=F$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$ donc $ACFB$ est un parallélogramme par suite : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$ (1)

On a aussi : $BCEA$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}$ (2)

De (1) et (2) on obtient : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{CF}$

Par conséquent : C est le milieu $[EF]$

Exercice02 : $(1,5pts)$ Soit l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C et $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Déterminer le rapport k de l'homothétie h

Solution: soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}$

Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=\frac{3}{2}$ donc $h\left(A,\frac{3}{2}\right)$: le rapport de l'homothétie h est : $k=\frac{3}{2}$

Exercice03 : $5,5pts(1pts+1pts+1,5pts+1pts+1pts)$

Soit ABC un triangle isocèle en B tel que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ et $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$ et J un point tel que :

$\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$ et soit la droite (Δ) qui passe par J

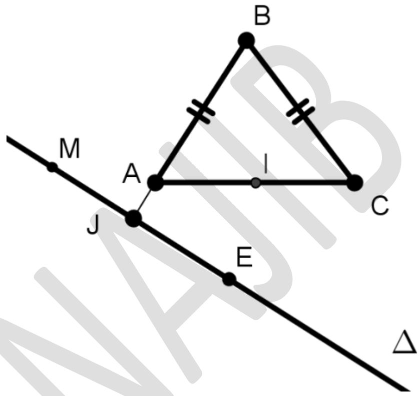
et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$ et soit $M\in(\Delta)$

1) a) Montrer que : $AB=6$ b) Calculer AC

2) Calculer : $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$

4) Calculer : BI



Solution : 1) On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$

Donc : $\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos\hat{B}=12$

Donc : $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$

C'est-à-dire : $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

Donc : $AB^2=36$ c'est-à-dire : $AB=6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B$

Donc : $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{3}$

Donc : $AC^2=54$ c'est-à-dire : $AC=\sqrt{54}$

2) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{2}\times36=45$

3) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

4) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$

Donc : $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

Donc : $72=2BI^2+27$ c'est-à-dire : $BI^2=\frac{45}{2}$

Par suite : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$

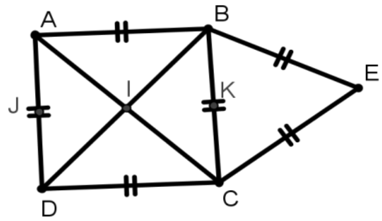
Exercice04 : $7pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts+2,5)$

Soit $ABCD$ un carré de centre I et a la longueur de son côté ; on construit à l'extérieur un triangle équilatérale BCE (Voir figure)

1) Soit J le milieu du segment $[AD]$ et K le milieu du segment $[BC]$

PROF: ATMANI NAJIB

Calculer $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a



2) a) Montrer que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

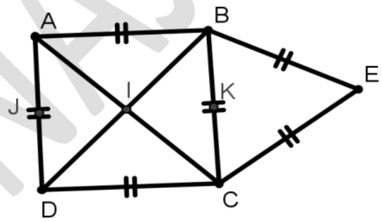
3) En utilisant les résultats de la question

Montrer que $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ Et en déduire : $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{7\pi}{12}$

Solution : 1) Calcul de $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a

On a : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}$



Et puisque : $(IJ)\perp(KC)$ alors : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}=0$

Et puisque : I le milieu de $[JK]$ alors : $\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\left(-\overrightarrow{IJ}\right)=-\overrightarrow{IJ}^2=-IJ^2$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=-\dfrac{a^2}{4}$ car $IJ=\dfrac{a}{2}$

2) a) Montrons que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

• Montrons d'abord que les points : I ; K et E sont alignés ?

On a : $EC=EB$ et $IC=IB$ car $ABCD$ un carré

Et on a: $KC=KB$ car K le milieu du segment $[BC]$

Donc : les points : I ; K et E appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : I ; K et E sont alignés

• On a : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}\right)\bullet\overrightarrow{IE}$ Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Et puisque : $(KB)\perp(IE)$ alors : $\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}=0$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos\left(\overrightarrow{IK};\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos(0)=IK\times IE$

Car $\cos(0)=1$ Or on a : $IK=\dfrac{a}{2}$

et $IE=IK+KE=IK+\sqrt{CE^2-CK^2}$

Donc : $IE=\dfrac{a}{2}+\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}a$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a\times a=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^2$

b) Déduction que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

On a : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}\cdot\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}^2+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{IE}=BI^2+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=BI^2-\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=KI^2+KB^2-\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IE}$ car $BI^2=KI^2+KB^2$

(le triangle IKB est rectangle en K) ($KI=KB=\dfrac{a}{2}$)

Donc : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=2\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^2\quad\dfrac{a}{2}$

Par suite : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) Montrons que : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

On a : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=BI\times BE\cos\left(IBE\right)$

Donc : $\cos\left(IBE\right)=\dfrac{\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}}{BI\times BE}$

Et on a : $IBE=IBC+CBE=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{12}$

Et on a $BI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ et $BE=a$ et $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

Donc : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2}=\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Déduction de : $\sin\dfrac{7\pi}{12}$?

On a : $\sin^2\dfrac{7\pi}{12}+\cos^2\dfrac{7\pi}{12}=1$ donc : $\sin^2\dfrac{7\pi}{12}=1-\cos^2\dfrac{7\pi}{12}=1-\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\dfrac{8-2\sqrt{12}}{16}=\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$

Donc : $\sin^2\dfrac{7\pi}{12}=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Par suite : $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\dfrac{7\pi}{12}=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or : $0\prec\dfrac{7\pi}{12}\prec\pi$ donc : $\sin\dfrac{7\pi}{12}\geq 0$

Par suite : $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Calcul de : $\tan\dfrac{7\pi}{12}$?

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{2}^2-\sqrt{6}^2}=\frac{8+2\sqrt{12}}{-4}=-2-\sqrt{3}$$

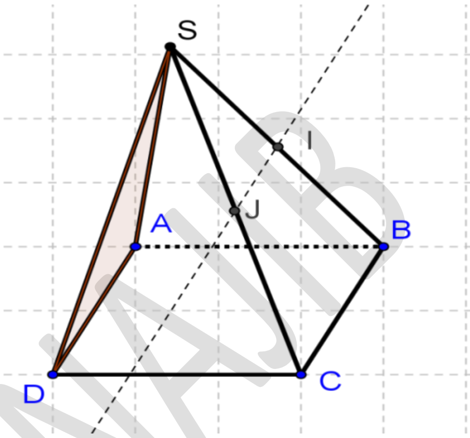
Exercice05 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$

$SABCD$ une pyramide sa base est un parallélogramme $ABCD$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[SB]$ et $[SC]$

1) Montrer que : $(AD)\parallel(IJ)$

2) Montrer que : $(IJ)\parallel(ADS)$



Solution : Dans le triangle SBC on a I le milieu du segment $[SB]$ et J le milieu du segment $[SC]$

Donc $(IJ)\parallel(BC)$(1) et puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $(BC)\parallel(AD)$) (2)

De (1) et (2) on déduit que $(AD)\parallel(IJ)$

2) On a : $A\in(ADS)$ et $D\in(ADS)$ donc : $(AD)\subset(ADS)$ (4)

(d'après un axiome d'incidence)

Et puisque : $(AD)\parallel(IJ)$ alors : $(IJ)\parallel(ADS)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB