**Tronc commun Sciences BIOF**

# *Correction* : Devoir surveiller n°6/D sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

**La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/**

**Exercice01 :** $(1,5\,pts)$

On considère deux points $A$ et $B$ tels que : $AB = 3cm$.

Et nous considérons la translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme respectivement les points : $A$ , $B$, $C$ et $D$ en $A'$ , $B'$ ; $C'$ et $D'$ et sachant que : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$

Calculer : $C'D'$.

**Solution :** On a : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ et la translation $t_{\vec{u}}$ transforme respectivement les points : $A$ , $B$, $C$ et $D$ en $A'$ , $B'$ ; $C'$ et $D'$ et puisque : la translation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{C'D'} = -2\overrightarrow{A'B'}$

Donc : $C'D' = 2A'B'$

D'autre part puisque : $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = A'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$

Alors d'après la propriété caractéristique de la translation on a : $A'B' = AB = 3cm$

Par suite : $C'D' = 2\times 3cm = 6cm$.

**Exercice02 :** $4,5\,pts(2\,pts + 0,5\,pts + 1\,pts + 1\,pts)$ *Soit* $ABC$ un triangle et soient les points $E$ et $F$ tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CF} = \vec{0}$

On considère l'homothétie $h$ de centre $A$ et de rapport $k = \frac{2}{5}$

1) Montrer que : $h(B) = E$ et $h(C) = F$

2) Faite une figure

3) Montrer que : $EF = \frac{2}{5}BC$

4) Montrer que : $(EF) \parallel (BC)$

**Solution :** 1) a) Montrons que : $h(B) = E$

On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ceci signifie que l'image de B par l'homothétie $h$ est E C'est-à-dire : $h(B) = E$

b) Montrons que : $h(C) = F$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

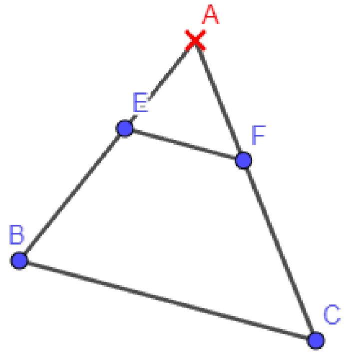
On a : $3\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CF} = \vec{0}$ donc : $3\overrightarrow{AF} + 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}\right) = \vec{0}$

Donc : $3\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{0}$ c'est-à-dire : $5\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$ ceci signifie que : $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Par suite : $h(C) = F$

2) La figure



3) Montrons que : $AB = 3CD$

On a : $\begin{cases} h(B) = E \\ h(C) = F \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \left\|\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $EF = \left|\frac{2}{5}\right|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

Donc : $EF = \frac{2}{5}BC$

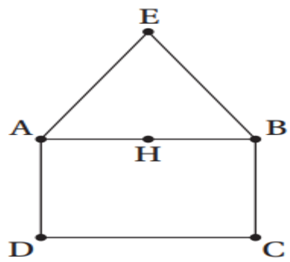
4) Montrons que : $(EF) \parallel (BC)$

On a : $\begin{cases} h(B) = E \\ h(C) = F \end{cases}$ donc : $h((BC)) = (EF)$

Et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle
Donc : $(EF) \parallel (BC)$

**Exercice03 :** $5pts(1pts \times 5)$ Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et BC = 3, ABE est un triangle équilatéral, H est le milieu du segment [AB].
Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$ e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}$




**Solution :** CONSEILS : a) Considérez les directions des deux vecteurs.
b) Décomposez le vecteur $\overrightarrow{DH}$ en utilisant la relation de Chasles.
c) Considérez le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
d) Remarquez que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ , puis considérez le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).
e) Utilisez les résultats des deux questions précédentes.

a) Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

Les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires, donc les vecteurs : $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux,

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 0$

b) Calculons $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH}\right) = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH}$

Les vecteurs : $\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux, (les droites (DC) et (DA) sont perpendiculaires

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH} = DC \times AH$ Car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens

Or : $DC = AB = 4$ et $AH = \frac{1}{2}AB = 2$

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AH} = 4 \times 2 = 8$

Donc : $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH} = 0 + 8 = 8$

c) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est B, donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 16$

d) Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

Le triangle ABE est équilatéral, donc (EH) est la médiatrice du segment [AB]. Le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) est donc H.

Les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ ont colinéaires de même sens, donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} = AB \times AH$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} = -AB \times AH$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} = -8$

e) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}$

Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} = \left(-\overrightarrow{BA}\right).\left(-\overrightarrow{AE}\right) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EA} = -8$ De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 16$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = -8 + 16 = 8$

**Exercice04 :** $4\,pts(1\,pts + 2\,pts + 1\,pts)$

Soit ABC un triangle tel que et $AB = 3$ et $AC = 1$ et $\cos BAC = -\frac{1}{3}$

Soit $M$ le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 2) Calculer $AM$ et $BC$

3) Soit $H$ tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

Montrer que les droites : $(AB)$ et $(MH)$ sont perpendiculaires

**Solution** :1) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 \times -\frac{1}{3} = -1$

2) a) Calculons $BC$ :

D’après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2 = (3)^2 + 1^2 - 2 \times (-1) = 12$ par suite : $BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

b) Calculons $AM$ :

On a : $M$ le milieu du segment $[BC]$

D’après le théorème de la médiane dans $ABC$ on a : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc : $AM^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AM^2 = \frac{1}{2}(9 + 1 - 6) = 2$ Par suite : $AM = \sqrt{2}$

3) Soit $H$ tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$ ; Montrons que les droites : $(AB)$ et $(MH)$ sont perpendiculaires

$M$ le milieu du segment $[BC]$ donc : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{4}{9}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \left(-\frac{1}{18}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MH} = -\frac{1}{18}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2}(-1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MH} = -\frac{1}{18}AB^2 - \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{18}9 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ Par suite : les droites $(AB)$ et $(MH)$ sont perpendiculaires

**Exercice05:** $5pts(1pts+2pts+1pts+1pts)$ Soient dans l'espace un cube $ABCDEFGH$

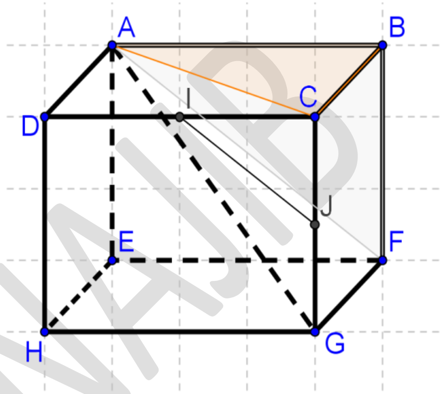
Avec $I$ le milieu du segment $[CD]$ et $J$ le milieu du segment $[CG]$

1) Montrer que : $(CG)\perp(ABC)$

2) Qu'elle est le la longueur du coté du cube $ABCDEFGH$ sachant que la longueur de la diagonal du cube est égale a $\sqrt{14}$

3) Montrer que : $(IJ)\parallel(ABF)$

4) Montrer que : $(AD)\perp(IJ)$




**Solution** :1) On a : $(CG)\perp(BC)$ car $BCGF$ carré et on a : $(CG)\perp(DC)$ car $CDHG$ carré

Et puisque : $(DC)$ et $(BC)$ se coupent dans le plan $(ABC)$ par suite : $(CG)\perp(ABC)$

2) Soit $a$ la longueur du coté d'un cube on a : $AG$ diagonal de $ABCDEFGH$

D'après le théorème de Pythagore directe dans le triangle $ABC$

On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc: $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Par suite : $AC = a\sqrt{2}$

Et puisque : $(CG)\perp(ABC)$ et $(AC)\subset(ABC)$ alors : $(CG)\perp(AC)$

Donc : $AGC$ est un triangle rectangle en C

Donc d'après le théorème de Pythagore dans le triangle $AGC$ on a: $AG^2 = AC^2 + CG^2$

Donc : $AG^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ c'est-à-dire : $AG = \sqrt{3}a$ or on a : $AG = \sqrt{14}$

Donc : $\sqrt{3}a = \sqrt{14}$ c'est-à-dire : $a = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{42}}{3}$

3)Dans le triangle $DCG$ on a $I$ le milieu du segment $[CD]$ et $J$ le milieu du segment $[CG]$

Donc : $AD = FG$ et puisque on a : $(1)$ $(DG)\parallel(IJ)$

Alors : $ADGF$ est un parallélogramme et par suite : $(DG)\parallel(AF)$

De $(1)$ et $(2)$ en déduit que : $(AF)\parallel(IJ)$

Et on a : $(AF)\subset(ABF)$ par suite $(IJ)\parallel(ABF)$

4) On a : $(AD)\perp(DC)$ et $(AD)\perp(DH)$

ET $(DC)$ et $(DH)$ se coupent dans le plan $(HDC)$

Par suite : $(AD)\perp(HDC)$ et puisque : $(IJ)\subset(HDC)$ alors : $(AD)\perp(IJ)$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*

*'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*