Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/E sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

Exercice01 : $6,5pts(0,5pts+2pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

$ABCD$ un parallélogramme et I et J deux points tels que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

1) Faite une figure

2) Monter que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3) Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C

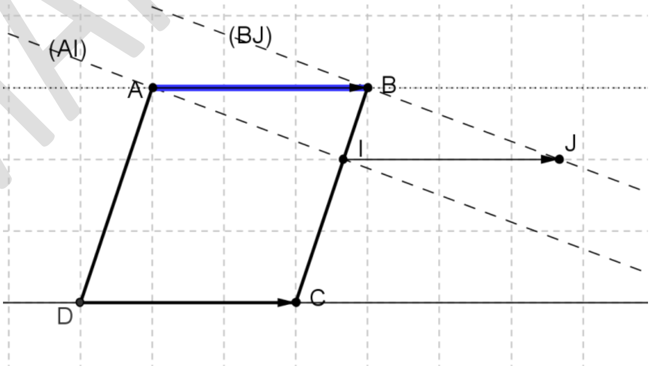
a) Montrer que $h((AB))=(CD)$

b) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-2$

4) Soit le point K tel que : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J)=K$ b) Montrer que : $AI=\frac{1}{2}CK$

Solution : 1) La figure



2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$ ؟؟؟؟؟

On a : $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

On a donc : $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

Déduction : on sait que L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc $(AI)\parallel(BJ)$

3)a) on a $h(B)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B c a d C donc $h((AB))=(CD)$

3)b) on a $h(B)=C$ donc $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$

Donc : $3\overrightarrow{CI}=2\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

Donc $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$

Par suite : $k=-2$

4)a) $h(J)=K$ ؟؟؟؟؟

On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$ donc : $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$ Par suite : $h(J)=K$

4)b) On a : $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc $\|\overrightarrow{CK}\|=\|-2\overrightarrow{BJ}\|$ alors $\|\overrightarrow{CK}\|=|-2|\|\overrightarrow{BJ}\|$ c'est-à-dire : $CK=2BJ$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABJI$ parallélogramme donc $BJ=AI$

Donc $CK=2AI$ par suite : $AI=\frac{1}{2}CK$

Exercice02 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$; *Soit* deux points A et B du plan et soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

1) Déterminer le point Ω invariant par la transformation f

2) Déterminer la nature de la transformation f

Solution : 1) Déterminons le point invariant par la transformation f

Soit Ω le point invariant par la transformation f

Ω un point invariant par la transformation f signifie que : $f(\Omega)=\Omega$

Signifie que : $\overrightarrow{\Omega\Omega}=3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}$

Signifie que : $\vec{0}=3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}$

Signifie que : $3\overrightarrow{\Omega A}+2\left(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $5\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{A\Omega}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : le point invariant par la transformation f vérifie : $\overrightarrow{A\Omega}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

2) Déterminons la nature de la transformation f

Soit M un point du plan et $f(M)=M'$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega M'}=3\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)+2\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{\Omega M'}=3\overrightarrow{M\Omega}+3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{M\Omega}+2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{M\Omega}$

Équivaut à : $\overrightarrow{\Omega M'}=4\overrightarrow{M\Omega}+\left(3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}\right)$ et puisque : $3\overrightarrow{\Omega A}+2\overrightarrow{\Omega B}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{\Omega M'}=4\overrightarrow{M\Omega}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{\Omega M'}=-4\overrightarrow{\Omega M}$

Cela veut dire que : f est une homothétie de centre Ω et de rapport $k=-4$

Exercice03 : $5pts(0,5pts+1,5pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$; I Un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB)

Soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure 2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$ 4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$ 5) Calculer : AJ

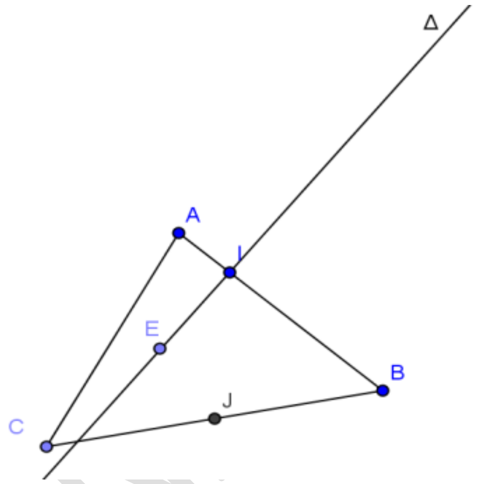
Solution :1) La figure

2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ c'est-à-dire : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

Donc : $AB=8$ donc : $AB^2=64$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :



$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$$

Donc : $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ donc : $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ donc : $40=AJ^2$ donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice04 : $5,5pts(1pts+1pts+1pts+1pts+1,5pts)$ SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD, de hauteur [SA].

On donne SA = 15 cm, AB = 8 cm et BC = 11 cm.

1) Calculer le volume V_1 de la pyramide SABCD.

2) Démontrer que SB = 17 cm.

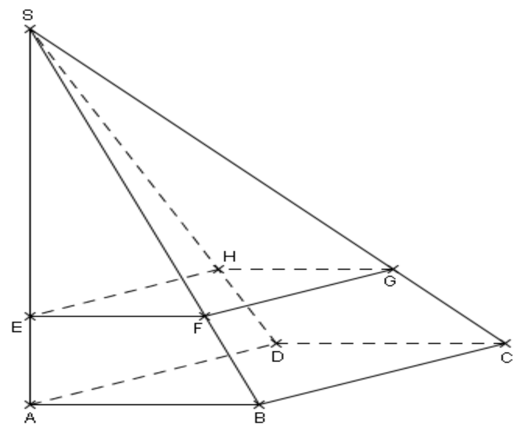
3) On note E le point de [SA] tel que SE = 12 cm et F le point de [SB] tel que SF = 13,6. Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

4) On coupe cette pyramide par le plan passant par E et parallèle à la base de la pyramide. La pyramide SEFGH ainsi obtenue est une réduction de la pyramide SABCD.

a) Quel est le coefficient de la réduction ?

b) En déduire le volume V_2 de la pyramide SEFGH en fonction de V_1.

Solution :1) Volume de la pyramide SABCD :



$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times SA\times\left(AB\times BC\right)=\frac{8\times11\times15}{3}=440cm^3$$

Le volume de la pyramide SABCD est de 440 cm^3.

2) On sait que [SA] est la hauteur de la pyramide SABCD donc [SA] est perpendiculaire à [AB] donc le triangle SAB est rectangle en A.

On peut utiliser le théorème de Pythagore dans ce triangle pour déterminer la longueur SB :

$SA^2+AB^2=SB^2$ Donc : $15^2+8^2=SB^2$

Donc : $SB=\sqrt{280}=17$ La longueur SB mesure 17 cm.

3) Les points S, E, A d'une part et les points S, F, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On a de plus : $\frac{SE}{SA}=\frac{12}{15}=0.8$ et $\frac{SF}{SB}=\frac{13.6}{17}=0.8$ **.** Nous avons par conséquent : $\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SB}$

Donc d’après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

4) a) Calcul du coefficient de réduction : $\frac{SE}{SA} = k = 0.8$

Le coefficient de réduction est de 0,8.

b) Si on multiplie les dimensions de la pyramide SABCD par 0,8, on multipliera son volume par $0{,}8^3$ pour obtenir celui de la pyramide SEFGH.

$V_2 = k^3 \times V_1 = 0.8^3 \times 440 = 225.28 cm^3$

Le volume de la pyramide SEFGH est de 225,28 cm^3.

C’est en forgeant que l’on devient forgeron : Dit un proverbe.
’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien