Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/F sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : $5,5pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts+1pts)$

$ABCD$ un parallélogramme et I le point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

On considère l'homothétie h de centre I et de rapport k tel que : $h(A)=B$

1) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-3$

2) Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (IC).

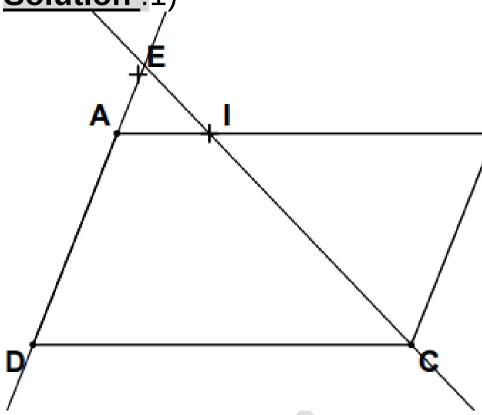
a) Montrer que $h(E)=C$

b) Déduire que : $BC=3AE$

3) On pose : $h(D)=D'$

Montrer que les points B ; C et D' sont alignés.

Solution :1)



1) Montrons que le rapport k de l'homothétie est $k=-3$

On a : $h(A)=B$ signifie que : $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$ ①

D'autre part, on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ signifie que : $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$

Signifie que : $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$

Signifie que : $4\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

Signifie que : $\overrightarrow{IB}=-3\overrightarrow{IA}$ ②

De : ① et ② on déduit que : $k=-3$

2) Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (IC)

a) Montrons que : $h(E)=C$

On a : $(AD)\cap(IC)=\{E\}$

Donc, il suffit de trouver l'image des droites (AD) et (IC) par l'homothétie h :

On sait que : $I\in(IC)$ donc : $h((IC))=(IC)$

D'autre part, on a : $h(A)=B$, donc l'image de (AD) est la droite qui passe par le point D et parallèle à la droite (AD)

Donc : $h((AD))=(BC)$

On obtient : $(BC)\cap(IC)=\{C\}$: ce qui signifie que : $h(E)=C$

b) Déduisons que : $BC=3AE$

On a $\begin{cases} h(A)=B \\ h(E)=C \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AE}$

Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|-3\overrightarrow{AE}\right\|$

Donc : $BC=|-3|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|$

Donc : $BC=2AE$

3) On pose : $h(D)=D'$

Montrons que les points B ; C et D' sont alignés.

On a $\begin{cases} h(A)=B \\ h(E)=C \\ h(D)=D' \end{cases}$ et es points A ; E et D sont aligné car $E\in(AD)$

Et puisque l'homothétie conserve l'alignement alors les points :
Alors : les points B ; C et D' sont aussi alignés.

Exercice02 : $7\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts+1\,pts)$

Soit ABC un triangle tel que : et $AB=2\sqrt{2}$ et $AC=3$ et $BAC=\frac{\pi}{4}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) En déduire la distance BC

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$; Calculer la distance AI

3) Soit J le milieu du segment $[AB]$

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

4) Soit K tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Montrer que les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$

b) Déduction de la distance BC ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2-2\times 6=8+9-12=5$ Par suite : $BC=\sqrt{5}$.

2) Calculons la distance AI : On a I le milieu du segment $[BC]$ d'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(8+9-\frac{5}{2}\right) = \frac{29}{4}$

Par suite : $AI = \frac{\sqrt{29}}{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

On a : J le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}8 = 4$

4) On a : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Et puisque : I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AB]$ Alors : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ} = \left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2 = \frac{6}{2} - \frac{9}{3} = 3-3+0$

Et puisque : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0$ alors les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires.

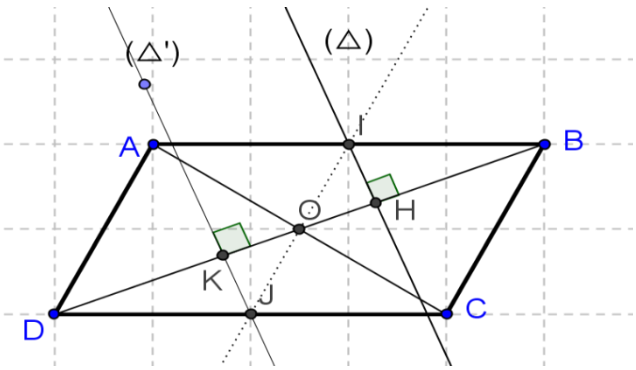
Exercice03 : $2,5pts(1pts+1,5pts)$ $ABCD$ un parallélogramme de centre O ; Les points : I , J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

Les points : H , K sont les projections orthogonales respectives des points I , J sur la droite (BD)

1) Montrer que : $S_O(I) = J$

2)Montrer que : $IHJK$ est un parallélogramme

Solution : 1)



• On a : O est le centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$

• On a : $S_O(A) = C$ et $S_O(B) = D$ et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[CD]$

Puisque la symétrie centrale conserve le milieu alors : $S_O(I) = J$

2)

• Puisque $O \in (BD)$ alors $S_O((BD)) = (BD)$

Soit (Δ) la droite qui passe par le point I et perpendiculaire a (BD) donc l'image de la droite (Δ) par S_O

Est la droite qui passe par le point J et perpendiculaire a (Δ) (conservation de la perpendiculaire)

On a : $(BD)\cap(\Delta) = \{H\}$ donc : $S_O((BD))\cap S_O((\Delta)) = \{S_O(H)\}$ c'est-à-dire : $(BD)\cap(\Delta') = \{S_O(H)\}$

Donc : $S_O(H) = K$ par suite : et O le milieu du segment $[HK]$

Et puisque : les diagonales $[IJ]$ et $[HK]$ ont le même milieu O alors : $IHJK$ est un parallélogramme

Exercice04 : $(2\,pts)$; Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M)=M'$ Équivaut à : $7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Équivaut à : $t_{\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}}(M)=M'$

Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

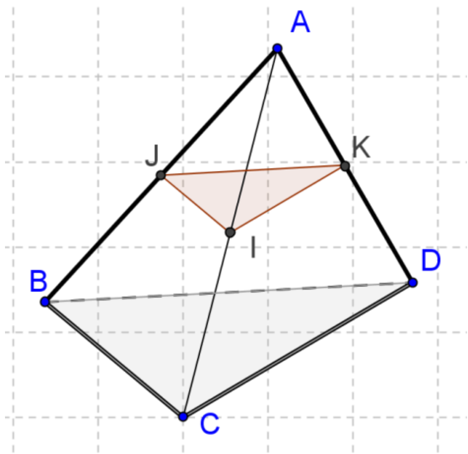
Exercice05 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ $ABCD$ un tétraèdre

Soient I ; J et K les milieux respectifs des segments : $[AC]$;$[AB]$et $[AD]$

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(BCD)\parallel(IJK)$

Solution : 1)



2)dans le triangle ABC on a I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(IJ)\parallel(BC)$

Et dans le triangle ABD on a : K le milieu du segment $[AD]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(JK)\parallel(BD)$

Et puisque : $(IJ)\parallel(BC)$ et $(BC)\subset(BCD)$ alors : $(IJ)\parallel(BCD)$

Et puisque : $(JK)\parallel(BD)$ et $(BD)\subset(BCD)$ alors : $(JK)\parallel(BCD)$

Et comme on a : $(IJ)\parallel(BCD)$ (1) et $(JK)\parallel(BCD)$ (2) et

$(IJ)\cap(JK)=\{J\}$ (3)

Et $(IJ)\subset(IJK)$ et $(JK)\subset(IJK)$ (4)

De (1) et (2) et (3) et (4) on déduit que: $(BCD)\parallel(IJK)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien