Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6 /G sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : $4pts(2pts+2pts)$

ABC un triangle ; soient les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

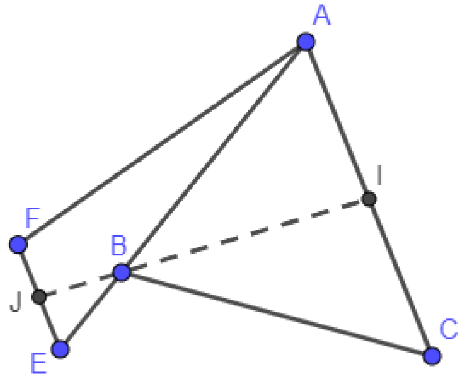
On considère l'homothétie h de centre B et de rapport $k=-\frac{1}{3}$

1) Montrer que $h(A)=E$ et $h(C)=F$

2) Soit I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[EF]$

Montrer que : $\overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

Solution :



1) a) Montrons que $h(A)=E$ c'est-à-dire Montrons que : $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

On a : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

Par suite : $h(A)=E$

b) Montrons que $h(C)=F$ c'est-à-dire Montrons que : $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

On a : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Par suite : $h(C)=F$

2) Soit I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[EF]$

Montrons que : $\overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ c'est-à-dire Montrons que : $h(I)=J$

On a : $\begin{cases} h(A)=E \\ h(C)=F \end{cases}$ et I le milieu du segment $[AC]$

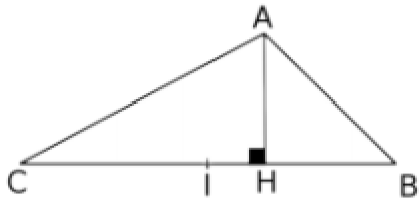
Et puisque l'homothétie conserve les milieux alors : $h(I)$ est le milieu du segment $[EF]$

Et comme : J le milieu du segment $[EF]$

Alors : $h(I)=J$

Donc : : $\overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

Exercice02 : $4pts(2pts+2pts)$ Considérons un triangle ABC tels que : BC = 6, I est le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
On a H ∈ [BI] et IH = 1.



Calculer : 1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ 2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

H étant le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) alors on a :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ étant colinéaire et de même sens alors :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=BC\times BH$

Déterminons BH.
On a : $BH=BC-HC$ Or : $HC=HI+IC=3+1=4$ alors : $HC=4$
Ainsi : $BH=6-4=2$
Par conséquent : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=BC\times BH=6\times2=12$

2)Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

H étant le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) alors on a :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CH}$ étant colinéaire et de sens contraire alors :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}=-BC\times CH$

De ce qui précède on a : $HC=4$

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}=-6\times4=-24$ D'où : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-24$

Exercice03 : $5,5pts(0,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$.

I un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB)

Soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure.

2) a) Montrer que : $AB=8$ b) Calculer BC .

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) Calculer : AJ

Solution : 1) La figure

2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$ Donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$ Donc : c'est-à-dire : $AB^2=64$

Donc : $AB=8$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ c'est-à-dire : $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ c'est-à-dire : $40=AJ^2$

Donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice04 : $2,5pts(1,5pts+1pts)$ Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : B est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{v}$ et D est l'image du point C par la translation de vecteur $2\vec{v}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

2) Soit O le milieu du segment $[CD]$

Montrer que : $ABOC$ est un parallélogramme

Solution :1) On a : $t_{\vec{v}}(A)=B$ signifie que : $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$

Et on a : $t_{2\vec{v}}(C)=D$ signifie que : $\overrightarrow{CD}=2\vec{v}$

Donc : $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ qui signifie que : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

2) Montrons que : $ABOC$ est un parallélogramme

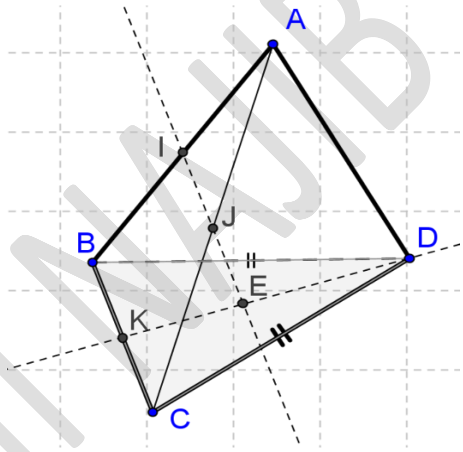
On a: O le milieu du segment $[CD]$ donc : $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et puisque : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

Alors : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}$ par suite : $ABOC$ est un parallélogramme

Exercice05 : $4pts(1pts+3pts)$ $ABCD$ un tétraèdre tel que : $BD=DC$ et Soient I ; J et K Les milieux respectifs des Segments $[AB]$; $[AC]$ et $[BC]$

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(DK)\perp(IJ)$



Solution : 1) La figure

2) Dans le triangle ABC on a I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Donc : $(IJ)\parallel(BC)$ (1)

Dans le triangle BCD on a : $BD=DC$ et K le milieu du segment $[BC]$ Donc : $(DK)\perp(BC)$) (2)

Donc : de (1) et (2) on déduit que : $(DK)\perp(IJ)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien