Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/H sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**

Exercice01 : $(2\,pts)$ A , B, C et D sont quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$

S_O est une symétrie centrale de centre O

S_O Transforme respectivement les points : A , B, C et D en A' , B' ; C' et D'

Montrer que : $\overrightarrow{C'D'}=4\overrightarrow{A'B'}$

Solution : $S_O(A)=A'$ et $S_O(B)=B'$ impliquent : $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{A'O}$ et $-\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{A'O}-\overrightarrow{OB'}=-\left(\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}$ (1)

De même : $S_O(C)=C'$ et $S_O(D)=D'$ impliquent : $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{C'D'}$ (2)

Or : $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$ donc : $-\overrightarrow{C'D'}=4\left(-\overrightarrow{A'B'}\right)$ d'après (1) et (2) Par conséquent : $\overrightarrow{C'D'}=4\overrightarrow{A'B'}$

De façon général on dit que la symétrie centrale conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Exercice02 : $(2\,pts)$ Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$$7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : Pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M)=M'$ Équivaut à : $7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Équivaut à : $t_{\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}}(M)=M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Exercice03 : $4,5\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$ ABC un triangle et D un point tel que :

$\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et I est le point d'intersection des droites (BD) et (AC) (Voir la figure)

On considère l'homothétie h de centre I qui transforme le point A en C.

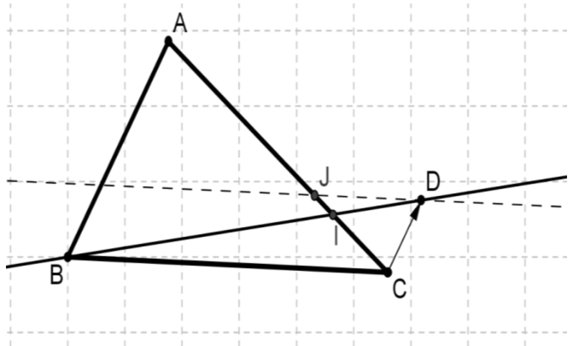
1) a) Déterminer l'image du point B par l'homothétie h

b) En déduire le rapport k de l'homothétie h

2) La droite qui passe par D et parallèle a (BC) coupe la droite (AI) en J

Montrer que $h(C)=J$

Solution : 1) a) On a : I qui transforme le point A en C



Et on a : $h((BI))=(BI)$ car $I\in(BI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(A)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc L'image de la droite (AB) est la droite qui passe par l'image de A qui est C

et parallèle a (AB) donc : $h((AB))=(CD)$

On a : $B\in(BI)\cap(AB)$ donc : $h(B)\in h((BI))\cap h((AB))$ c'est-à-dire : $h(B)\in(BI)\cap(CD)$

Et puisque : $(BI)\cap(CD)=\{D\}$ alors : $h(B)=D$

b) Déduction du rapport k de l'homothétie h ?

On a $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

Et puisque : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $k=-\frac{1}{4}$

2) on a : $h((CI))=(CI)$ car $I\in(CI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(B)=D$ donc L'image de la droite (BC) est la droite qui passe

Par l'image de B qui est D et parallèle a (BC) donc : $h((BC))=(DJ)$

On a : $C\in(BC)\cap(CI)$ donc : $h(C)\in h((BC))\cap h((CI))$ c'est-à-dire : $h(C)\in(DJ)\cap(CI)$

Et puisque : $(DJ)\cap(CI)=\{J\}$ alors : $h(C)=J$

Exercice04 : $6pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts)$

Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $BC=4\sqrt{3}$ et $ABC=\frac{\pi}{6}$; I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer AC

2) Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

3) Montrer que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculer : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle AIB

Solution : 1) Calculons AC : D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos ABC$

$AC^2=9+48-24\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AC^2=21$ par suite : $AC=\sqrt{21}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos ABC=3\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Nous avons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$ nous obtenons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9-\frac{1}{2}\times 18=0$

On a : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ Nous en déduisons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AB)

Et par conséquent le triangle AIB est rectangle en A

Exercice05 : $5,5\,pts(2\,pts+1,5\,pts+2\,pts)$

Soit $ABCD$ un parallélogramme et O le milieu du segment $[AB]$ et tel que :

$AD=4$ et $CD=6$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

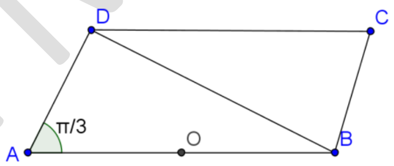
1) Calculer : BD et AC

2) Montrer que : pour tout point M du plan on a : $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AB^2$

3) En déduire que : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=24$

Solution : 1) Calcul de : BD

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons :



$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos BAD$

$BD^2=36+16-2\times 6\times 4\times\frac{1}{2}=28$ car $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

D'où : $BD=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

Calcul de : AC

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ADC nous obtenons :

$AC^2=DA^2+DC^2-2DA\times DC\cos ADC$

$AC^2=16+36-2\times 4\times 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=76$ car $\cos ADC=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

D'où : $AC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

2) Montrons que : pour tout point M du plan on a : $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AB^2$

Puisque O le milieu du segment $[AB]$ donc : D'après le théorème de la médiane dans MAB on a :

$MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AB^2$

3) Déterminons l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=24$

On a : $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc : $MA^2+MB^2=24$ Equivaut à : $2MO^2+\frac{1}{2}AB^2=24$

Equivaut à : $2MO^2=24-\frac{1}{2}\times AB^2=6$ car $AB=CD=6$

Equivaut à : $MO^2=3$ c'est-à-dire : $OM=\sqrt{3}$

Par conséquent : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=24$

Est le cercle de centre O et de rayon $R=\sqrt{3}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF. ATMANI NAJIB