Correction : Devoir surveiller n°6/I sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : $(2\,pts)$; Soit l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C et $\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

Déterminer le rapport k de l'homothétie h

Solution: Soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $3\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $3\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=5\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $3\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BA}$

Equivaut à : $3\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $5\overrightarrow{AC}=8\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$

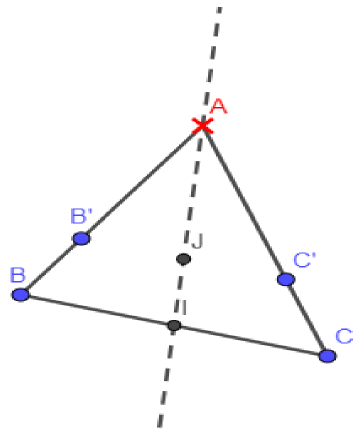
Equivaut à : $k=\frac{8}{5}$ donc $h\left(A,\frac{8}{5}\right)$: le rapport de l'homothétie h est : $k=\frac{8}{5}$

Exercice02 : $3,5\,pts(1,5\,pts+2\,pts)$ ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$ soient les points B' et C' tels que : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et le point J le milieu du segment $[B'C']$

On considère l'homothétie h de centre A et de rapport $k=\frac{2}{3}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

2) En utilisant l'homothétie, Montrer que les points J ; A et I sont alignés



Solution : 1) Montrons que : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Méthode 1 : On a : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ceci signifie que : $h(B)=B'$

De même on a : $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ceci signifie que : $h(C)=C'$

Donc : $\begin{cases}h(B)=B'\\h(C)=C'\end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique

on obtient : $\overrightarrow{B'C'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Méthode 2 : En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AC'}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

2) Montrons que les points J ; A et I sont alignés

L'image du point A par l'homothétie h est A' et L'image du point B par h est B'

Donc : L'image du segment $[BC]$ par h est le segment $[B'C']$, et comme I est le milieu du segment $[BC]$ alors $h(I)$ est le milieu de $[B'C']$ et comme J est le milieu de $[B'C']$

Donc : $h(I)=J$: Car l'homothétie conserve les milieux. Ceci signifie que les points J ; A et I sont alignés

Exercice03 : $4,5pts(1pts\times 3+1,5pts)$

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB=5$ et $BC=6$; Soit I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$

2) Soit K la projection orthogonale du point C sur la droite (AB)

Calculer : BK

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$:

1*iére méthode :* I le milieu du segment $[BC]$ et ABC un triangle isocèle en A

Cela équivaut à dire que (AI) est une hauteur du triangle ABC donc : $(AI)\perp(BC)$

Par suite $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

2*iére méthode :*

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}\cdot 2\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$

Et d'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle AIC on a : $AC^2=AI^2+IC^2-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=-\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-\left(AI^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2-AC^2\right)$

Et D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$ par suite : $AI^2=\frac{1}{2}\left(25+25-\frac{36}{2}\right)=16$

Par suite : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-(16+9-25)=0$

b) Calculons $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$:

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$AC^2=BA^2+BC^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(25+36-25^2\right)=18$

c) Calculons $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$: On sait que : $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ car I le milieu du segment $[BC]$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

Et on a : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}\left(25+36-25^2\right)=9$

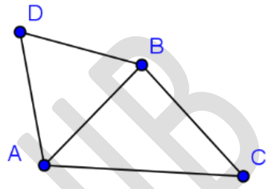
2) on a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$ et puisque K est la projection orthogonale du point C sur la droite (AB)

Alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}=18$

Donc : $BK\times BA=18$ par suite : $BK=\frac{18}{BA}=\frac{18}{5}$

Exercice04 : $5pts(1pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en B tel que $AB=\sqrt{2}$
On construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle équilatérale ABD (voir schéma)



1) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2) Calculer : AC et DC

3) Montrer que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) Vérifier que : $DAC=\frac{7\pi}{12}$

5) En déduire : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Solution : 1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

• D'après Pythagore on a : $AC^2=BC^2+AB^2$

$AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ Signifie que : $AC^2=4$ ssi $AC=2$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans BCD on a : $DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$ par suite : $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

• D'après le Théorème d'Al Kashi dans ACD on a :

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $DAC=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

On a : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$ donc : $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice05 : $(2\,pts)$ Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M) = M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

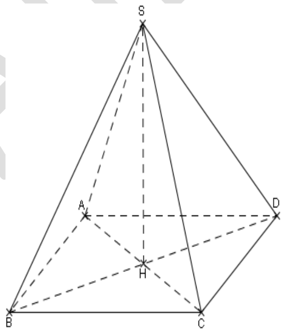
Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} - 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Équivaut à : $t_{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}(M) = M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Exercice06 : $3\,pts(1\,pts + 1\,pts + 1\,pts)$ Sur la pyramide SABCD à base rectangulaire ci-dessous, H est le centre du rectangle ABCD et (SH) est perpendiculaire à la base ABCD.



De plus, on a : SA = SB = SC = SD = 8,5 cm, CD = 12 cm et BC = 9 cm.

1) Vérifier que HD = 7,5 cm.

2) Calculer SH.

3) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

Solution :1) Le triangle BCD est rectangle en C donc on peut utiliser le théorème de Pythagore :On trouve : $BD = \sqrt{225} = 15cm$

H est le centre du rectangle ABCD donc il est le milieu

De la diagonale [BD] donc : $HD = \frac{1}{2}BD = 7.5cm$

4) (SH) est perpendiculaire à la base ABCD donc le triangle SHD est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore on trouve que : La longueur SH mesure 4 cm.

5) Volume de la pyramide SABCD :

$$V = \frac{BC \times CD \times SH}{3} = \frac{6 \times 12 \times 4}{3} = 144cm^3$$

Le volume de la pyramide est de 144 cm^3.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien