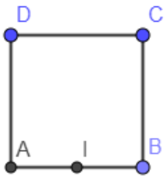
Correction : Devoir surveiller n°6/J sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : $(2\,pts)$ Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté 4 unités et I et le milieu du segment [AB].



Calculer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$

Solution :La méthode utilisant la projection orthogonale est particulièrement bien adaptée ici puisque l'on connaît la projection orthogonale *A* du point *D* sur la droite (*IB*).

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA}$ et puisque : $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires et sont de sens contraires

Alors : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} = -IB \times IA = -2 \times 2 = -4$

Exercice02 : $6\,pts(1\,pts + 1\,pts + 1\,pts + 1,5\,pts + 1,5\,pts)$

Soit ABC un triangle tel que et $AB = 2\sqrt{2}$ et $AC = 3$ et $BAC = \frac{\pi}{4}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) En déduire la distance BC

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$; Calculer la distance AI

3) Soit J le milieu du segment $[AB]$; Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$

4) Soit K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; Montrer que les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Solution : 1) a) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{2} \times 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

b) déduction de la distance BC ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2 \times 6 = 8 + 9 - 12 = 5$ par suite : $BC = \sqrt{5}$

2) Calculons la distance AI : on a : I le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right)$ C'est-à-dire : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(8 + 9 - \frac{5}{2}\right) = \frac{29}{4}$

Par suite : $AI = \frac{\sqrt{29}}{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$

On a : J le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}8 = 4$

PROF: ATMANI NAJIB

4) On a : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Et puisque : I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AB]$ Alors : $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=\frac{6}{2}-\frac{9}{3}=3-3+0$

Et puisque : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ alors les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Exercice03 : $5pts(1,5pts+1,5pts+1pts+1pts)$

ABC un triangle et I et J sont les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement et E un point tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et P est le point d'intersection des droites : (EI) et (AB)

On considère l'homothétie h qui transforme le point E en P

1) a) Monter que : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$.

b) Monter que : le rapport de l'homothétie h est $k=-2$

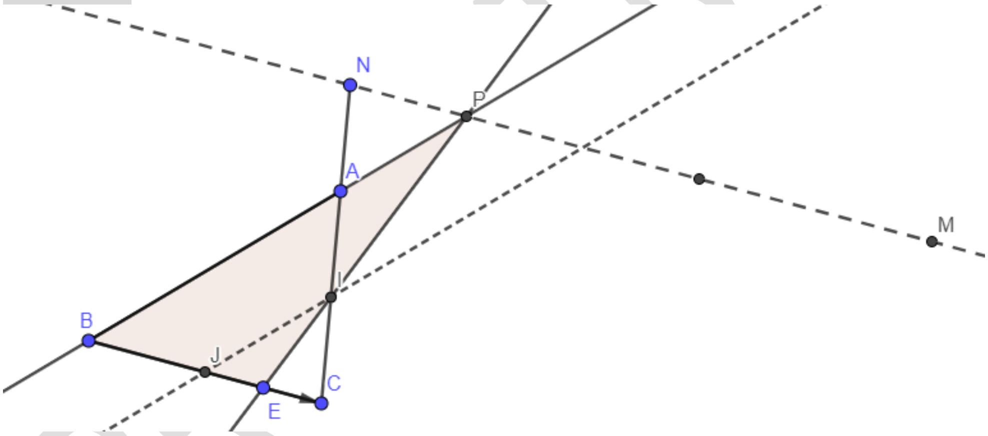
2) On considère le point M tel que : $\overrightarrow{PM}=-2\overrightarrow{EB}$

a) Monter que : l'image du point B par l'homothétie h est le point M

b) Soit N l'image du point C par l'homothétie h

Monter que : $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$

Solution : 1) a) Montrons que : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$.



Dans le triangle ABC on a : I et J sont les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement

Donc : $(IJ)\parallel(AB)$ et par suite : $(IJ)\parallel(BP)$

D'après le théorème de Thalès dans le triangle BPE on a : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}$

On a : $\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BJ}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ Et on a : $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EB}=-3\overrightarrow{EJ}$

Par suite : $EB=3EJ$ c'est-à-dire : $\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$

Par suite : $\frac{EI}{EP}=\frac{EJ}{EB}=\frac{1}{3}$

b) Montrons que : le rapport de l'homothétie h est $k=-2$

Soit k le rapport de l'homothétie h

On a : $h(E)=P$ signifie que : $\overrightarrow{IP}=k\overrightarrow{IP}$

Mais on a : $\frac{EI}{EP}=\frac{1}{3}$ donc : $EP=3EI$ et puisque $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires et de même sens

Alors : $\overrightarrow{EP}=3\overrightarrow{EI}$

Donc : $\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IP}=3\overrightarrow{EI}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=3\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{EI}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=2\overrightarrow{EI}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=-2\overrightarrow{IE}$ et par suite : $k=-2$

2)a) Montrons que : $h(B)=M$

On a : $\overrightarrow{PM}=-2\overrightarrow{EB}$ signifie que : $\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IP}=-2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IE}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IP}=-2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IE}$

Signifie que : $\overrightarrow{IM}=-2\overrightarrow{IB}$ car $\overrightarrow{IP}=-2\overrightarrow{IE}$

Par suite : $h(B)=M$

2)b) Montrons que : $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$

On a : $\begin{cases} h(C)=N \\ h(B)=M \end{cases}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Alors : $\overrightarrow{MN}=-2\overrightarrow{BC}$ et puisque : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$

Alors : $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$

Donc : $\overrightarrow{MN}=-2\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$

Exercice04 : $(3\,pts)$ Soient deux points fixes différents A et B du plan.

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

<u>Solution :</u> Pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=-2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Équivaut à : $t_{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}(M)=M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Exercice05 : $4\,pts(1\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$ Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace et Soient I ; J les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[FG]$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Montrer que : $(IJ) \parallel (HFB)$

2) Montrer que $(HFD) \cap (EIJ) = (PQ)$:

Avec $(HF) \cap (EJ) = \{P\}$ et $(AI) \cap (BD) = \{Q\}$

3) Montrer que $(PQ) \parallel (FB)$:

Solution :1) On a I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu

Du segment $[FG]$ donc : $(BF) \parallel (IJ)$

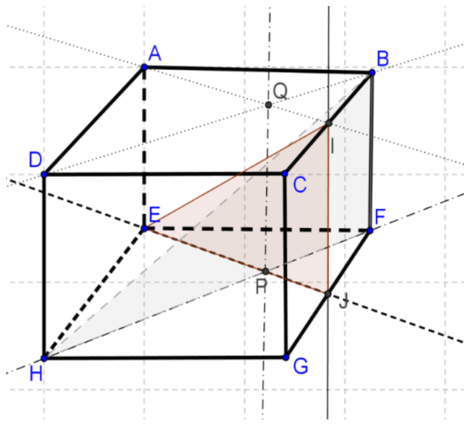
Et on a $(BF) \subset (HFB)$ donc : $(IJ) \parallel (HFB)$

2) On a : $(EJ) \subset (EIJ)$ et $(AI) \subset (EIJ)$ (car $(AE) \parallel (IJ)$ les points $A ; J ; E ; I$ sont coplanaires

Donc les points $A ; J ; E ; I$ sont coplanaires

Donc : $P \in (EIJ)$ et $Q \in (EIJ)$

(car $Q \in (AI)$ et $P \in (EJ)$)



Ce qui équivaut à dire que : $(PQ) \subset (EIJ)$ (1)

D'autre part on a : $(HF) \subset (HFB)$ et $(BD) \subset (HFD)$ (car $(DH) \parallel (BF)$

Donc : D ; H ;et B coplanaires) F

Donc : $P \in (HFD)$ et $Q \in (HFD)$

Ce qui équivaut à dire que/ $(PQ) \subset (HFD)$:2)

Et puisque : $(HFD) \neq (EIJ)$

Alors de (1) et (2) on déduit que : $(HFD) \cap (EIJ) = (PQ)$

3) On a : $(IJ) \subset (EIJ)$ et $(HFD) \cap (EIJ) = (PQ)$ *et* $(BF) \subset (HFD)$ *et* $(BF) \parallel (IJ)$

Donc : $(PQ) \parallel (FB)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB