Tronc commun Sciences BIOF

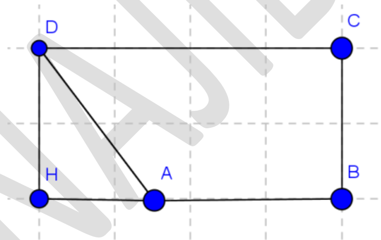
Correction : Devoir surveiller n°6/K sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : $2\,pts(1pts+0,5pts+0,5pts)$

Soit HBCD un rectangle : $AB=3cm$; $AD=2cm$; $BC=\sqrt{2}cm$

1) Calculer AH 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Solution : 1) Calculons AH : le théorème de Pythagore nous permet d'écrire : $AD^2=AH^2+HD^2$

D'où $AH^2=AD^2-HD^2=4-2=2$

Donc : $AH=\sqrt{2}cm$

2) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\cos\pi=AB\times AH\,(-1)=-3\sqrt{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=3^2=9$

Exercice02 : $7,5\,pts(1pts+1pts+1pts+1pts+1,5pts+1,5pts+1pts)$

Soit ABC un triangle tel que $AB=1$ et $BC=AC=\sqrt{2}$

I Le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

1) Calculer CI

2) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) En déduire que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos BAC$.

5) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle BAD

6) Soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

a) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

b) Montrer que $(MD)\perp(AC)$

Solution :1) a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $BC+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{7}{4}=CI^2$

Donc : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : I le milieu du segment $[AB]$ et ABC isocèle en C donc : $(IC)\perp(AB)$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$ par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\cos 0=AB\times AI=AB\times\dfrac{AB}{2}=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Calcul de $\cos BAC$: On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}$

Donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\dfrac{1}{2}$

Signifie que : $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire : $\cos\hat{A}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ donc : $\cos\hat{A}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5) On a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$

$=2\times\dfrac{1}{2}-AB^2=1-1=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ donc : $\overrightarrow{AM}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2-\dfrac{1}{2}=4-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$

6) $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{7}{2}$

$=-\dfrac{7}{4}\cdot 2+\dfrac{7}{2}=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{2}=0$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MD)\perp(AC)$

Exercice03 : $(1,5\,pts)$ *Déterminer* le rapport k de l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C et tel que : $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$

Solution : Soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$

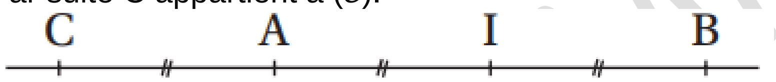
Equivaut à : $k=-2$ donc $h(A,-2)$

Exercice04 : $(1,5\,pts)$ Soient deux points fixes différents A et B du plan.
Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :
$\overrightarrow{MM'}-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur

Solution : pour chaque point M du plan nous avons :
$f(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-2\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$
Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$
Équivaut à : $t_{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}(M)=M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$

Exercice05 : $3,5\,pts(1\,pts+1\,pts+1,5\,pts)$
A et B sont deux points tels que AB = 6. I est le milieu du segment [AB].
On appelle ($\mathcal{E}$). L'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=27$
a) Soit C le symétrique de I par rapport à A. Montrer que C appartient à ($\mathcal{E}$).
b) Montrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-9$
c) Déterminer l'ensemble ($\mathcal{E}$).

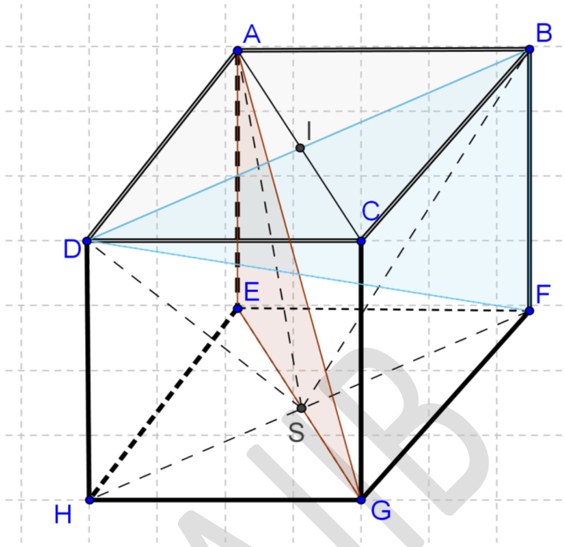
Solution : a) Les vecteurs : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de même sens
Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CB$ et $CA=3$ et $CB=9$
Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=3\times 9+27$
Par suite C appartient à ($\mathcal{E}$).



b) Montrons que :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$ car : I est le milieu du segment [AB].
Donc : $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$
Par suite : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-3^2=MI^2-9$
c) Déterminons l'ensemble ($\mathcal{E}$).
M appartient à ($\mathcal{E}$) signifie que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=27$
Signifie que : $MI^2-9=27$
Signifie que : $MI^2=36$
Signifie que : $MI=6$
($\mathcal{E}$) est donc le cercle de centre I et de rayon 6 (passant par C).

Exercice06 : $4\,pts(1\,pts\times 4)$; Soient dans l'espace le cube $ABCDEFGH$
1) Montrer que : $(AE)\perp(BD)$
2) Montrer que : $(BD)\perp(AEC)$
3) Soit S le centre du carré $EFGH$ avec : $AB=3cm$
Calculer le volume du cube $ABCDEFGH$ et de la pyramide $SABCD$
4) Montrer que : $(BDF)\perp(AEG)$

Solution :1) On a : $(AE)\perp(AB)$ car $ABFE$ carré et $(AE)\perp(AD)$ car $ADHE$ carré



Et on a : (AB) et (AD) se coupent dans le plan (ABD)

Donc : $(AE)\perp(ABD)$

Et puisque : $(BD)\subset(ABD)$ alors $(AE)\perp(BD)$

2) on a : $(AE)\perp(BD)$ et $(AC)\perp(BD)$

(car $ABCD$ carré)

Et on a : (AE) et (AC) se coupent dans le plan (ACE)

Donc : $(BD)\perp(AEC)$

3) a) Le volume du cube $ABCDEFGH$ est :

$AB^3 = 3^3 = 27cm^3$

b) Le volume de la pyramide $SABCD$:

Soit I le centre du carré $ABCD$

Donc (SI) est une hauteur de la pyramide $SABCD$

Donc le volume du pyramide $SABCD$ est : $V_{SABCD} = \frac{1}{3}\times A_{SABCD}\times SI$

Or on a : $SI = AE$ donc : $SI = 3cm$

On a : $A_{SABCD} = AB^2 = 9cm^2$ donc : $V_{SABCD} = \frac{1}{3}\times 9\times 3cm^3 = 9cm^3$

4) Montrons que : $(BDF)\perp(AEG)$?

On a : $(AE)\parallel(CG)$ donc : les points $A;E;C;G$ sont coplanaires

Et par suite : $(AEC)=(AEG)$ et on a : $(BD)\subset(BDF)$ et $(BD)\perp(AEG)$

Donc : $(BDF)\perp(AEG)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien