Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/L sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $(1,5\,pts)$

Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A et qui transforme B en C

Tel que : $3\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Solution : Soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(B)=C$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{BC}+5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ Equivaut à : $3\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Equivaut à : $3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ Equivaut à : $8\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=\frac{3}{8}$ donc $h\left(A,\frac{3}{8}\right)$

Exercice02 : $4,5\,pts(1pts+1pts+1pts+1,5\,pts)$ Soit ABC un triangle tel que :

$AB=3$ et $BC=4\sqrt{3}$ et $ABC=\frac{\pi}{6}$ avec I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer AC . 2) Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

3) Montrer que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculer : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle AIB

Solution : 1) Calculons AC : D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos ABC$

$AC^2=9+48-24\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AC^2=21$ Par suite : $AC=\sqrt{21}$.

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos ABC=3\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Nous avons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ et puisque I est le milieu du segment $[BC]$

Nous obtenons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

4) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

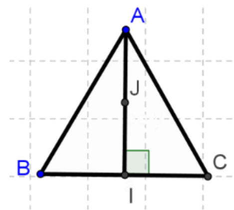
Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9-\frac{1}{2}\times18=0$

On a : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ Nous en déduisons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AB)

Et par conséquent le triangle AIB est rectangle en A

Exercice03 : $5,5pts(2pts+1,5pts+2pts)$ Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $AB=3cm$

I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AI]$



1) Calculer : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$ et la distance AI

2) Montrer que : pour tout point M du plan on a :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$$

3) Déterminer : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $2MA^2+MB^2+MC^2=18$

Solution : a) Calcul de : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$

ABC Un triangle équilatéral et I le milieu du segment $[BC]$ donc : $(BC)\perp(IJ)$

Et donc : I est la projection orthogonale de J sur segment (BC)

Donc : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}^2=-IC^2=-2^2=-4$

b) Calcul de : AI

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Nous obtenons donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{1}{2}BC^2\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(3^2+3^2-\frac{1}{2}3^2\right)=\frac{3}{4}\times3^2=\frac{27}{4}$ Par suite : $AI=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

1) Montrons que : pour tout point M du plan on a : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

Soit M un point dans le plan et I le milieu du segment $[BC]$

Donc d'après le théorème de la médiane dans MBC on a : $MB^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$

$$2MA^2+MB^2+MC^2=2MA^2+2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(MA^2+MI^2\right)+\frac{1}{2}BC^2$

D'autre part on a : J le milieu du segment $[AI]$ donc d'après le théorème de la médiane dans MAI

On a : $MA^2+MI^2=2MJ^2+\frac{1}{2}AI^2$ donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(2MJ^2+\frac{1}{2}AI^2\right)+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{27}{4}+\frac{9}{2}$ car $AI=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

2) Déterminons l'ensemble (C) ? $M\in(C)$ Signifie que : $2MA^2+MB^2+MC^2=18$

Signifie que : $4MJ^2+\frac{45}{4}=18$ c'est-à-dire : $4MJ^2=18-\frac{45}{4}$ qui signifie que $MJ^2=\frac{27}{16}$

C'est-à-dire : $MJ=\sqrt{\frac{27}{16}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Par suite l'ensemble (C) est le cercle de centre J et de rayon $R=\frac{3\sqrt{3}}{4}cm$

Exercice04 : $4pts(1,5pts+1pts+1,5pts)$ Soit ABC un triangle ; I et J et K les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[AC]$ et $[AB]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

2) Soit M le point du plan ; Représenter les points E et F les images du point M respectivement par les translations $t_{\overrightarrow{KC}}$ et $t_{\overrightarrow{BJ}}$

3) Déterminer la translation qui transforme E en F

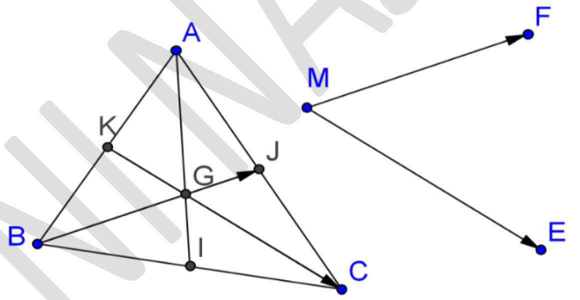
Solution : 1) Montrons que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

Soit G Le centre de gravité du triangle ABC

Alors on sait que : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$

Donc : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)=\vec{0}$ car $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

2) Représentation des points E et F :



3) Détermination de la translation qui transforme E en F

On a : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}$ donc : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{BJ}$

Et puisque : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IA}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{IA}$ par suite : $t_{\overrightarrow{IA}}(E)=F$

Par conséquent la translation qui transforme E en F est $t_{\overrightarrow{IA}}$ c'est-à-dire : la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$

Exercice05 : $04,5pts(0,5pts+2pts+1pts+1pts)$

Soit $ABCD$ un rectangle de l'espace et Soit E un point de l'espace tel que : $(AE)\perp(ABC)$

Et Soient I ; J et K les milieux respectifs des Segments $[EB]$; $[AB]$ et $[DC]$

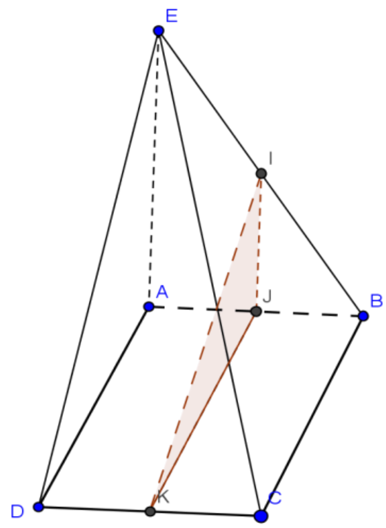
1) Faire une figure

2) Montrer que : $(JIK)\parallel(ADE)$ et que : $(IJ)\parallel(ADE)$

3) Montrer que : $(JK)\perp(ABE)$

4) Déterminer l'intersection des plans (ABE) et (AIK)

Solution : 1) La figure



2)Dans le triangle ABE on a I le milieu du segment $[EB]$ et J le milieu du segment $[AB]$

Donc : $(IJ)\parallel(AE)$

Et on a : $(AE)\subset(ADE)$ donc : $(IJ)\parallel(ADE)$ (1)

On a : K le milieu du segment $[DC]$

Donc : $(JK)\parallel(AD)\parallel(BC)$ et puisque $(AD)\subset(ADE)$ Alors : $(JK)\parallel(ADE)$ (2)

De : (1) et (2) en déduit que : $(JIK)\parallel(ADE)$

3) On a : $(AE)\perp(ABC)$ et $(JK)\subset(ABC)$ donc : $(AE)\perp(JK)$

Et on a : $(JK)\parallel(AD)$ et $(AD)\perp(AB)$ donc : $(JK)\parallel(AB)$

Donc : puisque (JK) est orthogonale a deux droites sécantes (AB) et (AE)

Contenues dans le plan (ABE) alors $(JK)\parallel(ABE)$:

4) On a : $E \notin (ABC)$ car $(AIK) \neq (ABE)$

Et on a : $A \in (ABE)$ et $A \in (AIK)$ et $(EB) \subset (ABE)$

Donc : $I \in (ABE)$ car ($I \in (EB)$)

Et on sait que : $I \in (AIK)$ donc : $(AIK) \cap (ABE) = (AI)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien