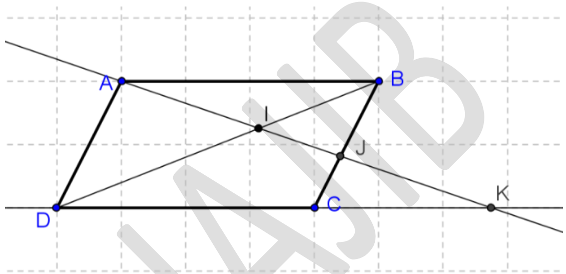
Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/M sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

Exercice01 : $3,5pts(0,5pts+1pts+1pts+1pts)$

$ABCD$ Un losange de centre O et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$

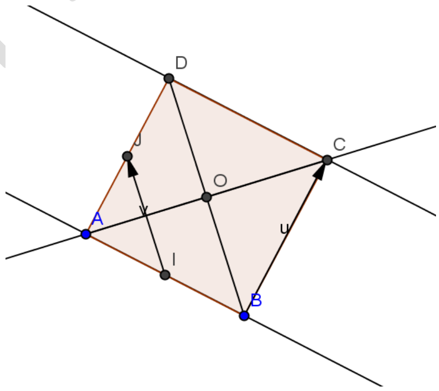


1) Faite une figure 2) Déterminer $S_O(A)$ et $S_O(B)$ et $S_O(O)$ et $S_O((AB))$

3) Déterminer $S_{(AC)}(B)$ et $S_{(AC)}(A)$ et $S_{(AC)}(O)$ et $S_{(AC)}([AB])$ et $S_{(AC)}(I)$ et $S_{(AC)}((OI))$

4) Déterminer $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

Solution : 1) La figure



2) $S_O(A)=C$ Car $OA=OC$

$S_O(B)=D$ Car $OB=OD$

$S_O(O)=O$ Car O est invariant

On a $\begin{cases} S_O(A)=C \\ S_O(B)=D \end{cases}$ donc $S_O((AB))=(CD)$

Et on a $(AB)\parallel(CD)$ car L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.

3)

- $S_{(AC)}(B)=D$ car (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$
- $S_{(AC)}(A)=A$ car tous les points de la droite (AC) sont invariants
- $S_{(AC)}(O)=O$ car $O\in(AC)$ et tous les points de la droite (AC) sont invariants
- On a $\begin{cases} S_{(AC)}(A)=A \\ S_{(AC)}(B)=D \end{cases}$ donc $S_{(AC)}([AB])=[AD]$
- On a I le milieu du segment $[AB]$ et $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ donc $S_{(AC)}(I)$ est le milieu du segment $[AD]$ donc c'est J donc $S_{(AC)}(I)=J$
- On a $\begin{cases} S_{(AC)}(O)=O \\ S_{(AC)}(I)=J \end{cases}$ donc $S_{(AC)}((OI))=(OJ)$

4)On a : $ABCD$ un losange donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ c'est à dire : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$

- On a : ABD un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$

Donc : $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ et on a O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$

Alors : $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ donc $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

- On a : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ et O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

Donc $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ c'est-à-dire : $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$ et on a $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$ par suite : $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

Exercice02 : $(1pts)$ On considère deux points A et B et une homothétie h qui transforme A en A' et laisse invariant le point B de sorte que : $\overrightarrow{A'A}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Trouver le rapport k de cette homothétie

Solution : nous avons : $h(A)=A'$ et $h(B)=B'=B$

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a ; $\overrightarrow{A'B}=k\overrightarrow{AB}$ (1)

D'autre part nous avons : $\overrightarrow{A'A}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

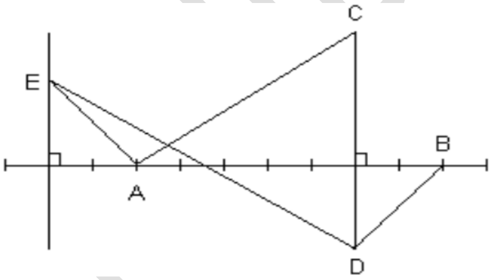
Équivaut à : $\overrightarrow{A'B}=-3\overrightarrow{AB}$ (2)

De (1) et (2) nous déduisons : $k=-3$

Exercice03 : $4pts(1pts+1pts+1pts+1pts)$

Dans la configuration ci-contre On a : AB=7

Déterminer, par lecture graphique, les produits scalaires suivants : 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ 4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$



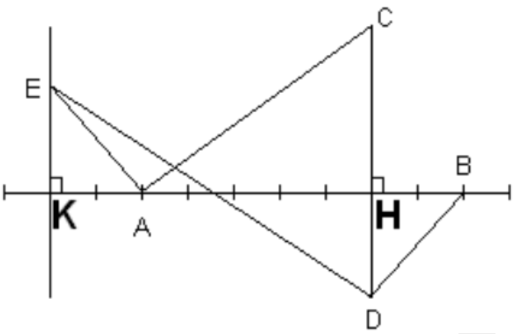
Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB) (voir figure complétée), alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens, on aura alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB\times AH=7\times 5=35$



2) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}$

On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}.\left(-\overrightarrow{BD}\right)=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$

Le point H précédemment défini est le projeté orthogonal de D sur (AB)

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}=BA\times BH$ car les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires de même sens.

Ainsi : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=7\times 2=14$

On conclut que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}=-14$

3) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

Si on appelle K le projeté orthogonal de E sur (AB) (cf figure complétée)

Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}$ et puisque les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires de sens contraires.

On aura : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}=-AB\times AK=-72=-14$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=-14$

4) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$

En utilisant la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, on écrit :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

En projetant le point D sur (AD), on obtient : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB\times AH$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens.

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AH=7\times5=35$ Ainsi : $-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=-35-14=-49$

On conclut que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=-49$

Exercice04 : $6,5pts(0,5pts+1pts+1pts+1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit ABC un triangle tel que $AB=1$ Et $BC=AC=\sqrt{2}$

I Le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) Calculer CI

2) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$

4) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ et en déduire $\cos BAC$

5) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle BAD

6) Soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

a) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

b) Montrer que $(MD)\perp(AC)$

<u>**Solution**</u> : **1)** a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$$BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{AB^2}{2}$$

Donc : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ donc : $\frac{7}{4}=CI^2$ donc : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ donc : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : I le milieu du segment $[AB]$et ABC isocèle en C

Donc : $(IC)\perp(AB)$ cad $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AI}\|\cos0=AB\cdot AI\cdot1=AB\cdot\frac{AB}{}\cdot\cos0$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Calcul de $\cos BAC$:On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc : $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) On a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$

Donc : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

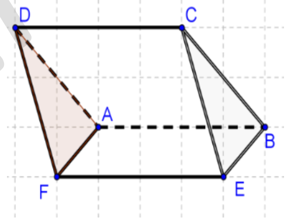
B) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}\cdot2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$

Signifie que : $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$

Par suite : $(MD)\perp(AC)$

Exercice05 : $5pts(1pts\times5)$ Soient dans l'espace les parallélogrammes $ABCD$ et $ABEF$ Non situés dans le même plan



1) Montrer que : $(BCE)\parallel(ADF)$

2)a) Montrer que : les points E ; F ; C ; D sont coplanaires

b) Montrer que : $(EC)\parallel(DF)$

c) En déduire : la nature du quadrilatère $CDFE$

3) Déterminer l'intersection des plans (ACE) et (ADF)

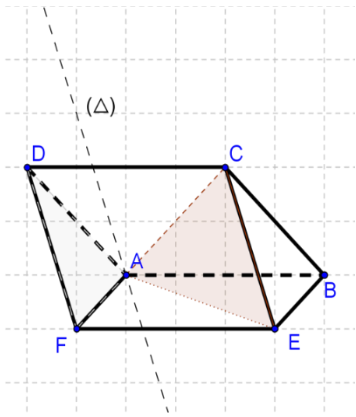
Solution : 1) $ABCD$ est un parallélogramme donc : $(AD)\parallel(BC)$

Et on a : $ABEF$ est un parallélogramme donc : $(AF)\parallel(BE)$

ET on a : $(AD)\cap(AF)=\{A\}$ et $(AD)\subset(ADF)$ et $(AF)\subset(ADF)$

Et on a : $(BC)\cap(BE)=\{B\}$ et $(BC)\subset(BCE)$ et $(BE)\subset(BCE)$

Donc : $(BCE)\parallel(ADF)$



2) a) On a : $ABCD$ est un parallélogramme donc : $(DC)\parallel(AB)$

ET On a : $ABEF$ est un parallélogramme donc : $(EF)\parallel(AB)$

Par suite : $(EF)\parallel(DC)$

Donc : les points E ; F ; C ; D sont coplanaires

b) On a : $(ADF)\parallel(BCE)$ et $(EFDC)\cap(ADF)=(DF)$ et $(EFDC)\cap(BCE)=(EC)$ Donc : $(EC)\parallel(DF)$

c) On a : $(DC)\parallel(EF)$ et $(EC)\parallel(DF)$

Donc : quadrilatère $CDEF$ est un parallélogramme

3) On a : $C\in(ACE)$ et $C\notin(ADF)$ donc : $(ACE)\neq(ADF)$

On a : $A\in(ACE)\cap(ADF)$

On pose : $(ACE)\cap(ADF)=(\Delta)$

On a : $(FD)\subset(ADF)$ et $(CE)\subset(ACE)$ et $(FD)\parallel(CE)$

Donc : (Δ) est la droite qui passe par A et parallèle a (CE) et (FD)

Donc : L'intersection des plans (ACE) et (ADF) est la droite qui passe par A

Et parallèle a (CE) et (FD)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien