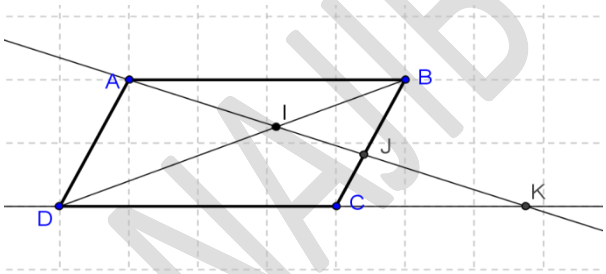
Correction : Devoir surveiller n°6 /N sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE
- ✓ Géométrie dans l'espace

La correction voir😊 http://www.xriadiat.com/

Exercice01 : $4,5pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts)$ ABC un triangle et D un point tel que : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et I est le point d'intersection des droites (BD) et (AC) (Voir la figure)



On considère l'homothétie h de centre I qui transforme le point A en C.

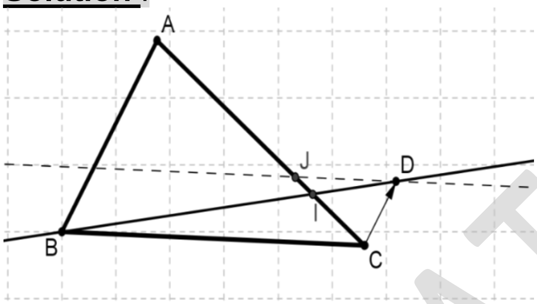
1) a) Déterminer l'image du point B par l'homothétie

b) En déduire le rapport k de l'homothétie h.

2) La droite qui passe par D et parallèle à (BC) coupe la droite (AI) en J.

Montrer que $h(C)=J$.

Solution :



1)a) On a de I qui transforme le point A en C

Et on a : $h((BI))=(BI)$ car $I\in(BI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(A)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par l'image de A qui est C et parallèle a (AB)

Donc : $h((AB))=(CD)$

On a : $B\in(BI)\cap(AB)$ Donc : $h(B)\in h((BI))\cap h((AB))$

C'est-à-dire : $h(B)\in(BI)\cap(CD)$

Et puisque : $(BI)\cap(CD)=\{D\}$ alors : $h(B)=D$

b) Déduction du rapport k de l'homothétie h ?

On a $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

Et puisque : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $k=-\frac{1}{4}$

2) On a : $h((CI))=(CI)$ car $I\in(CI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(B)=D$ donc l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par l'image de B

qui est D et parallèle a (BC)

Donc : $h((BC))=(DJ)$

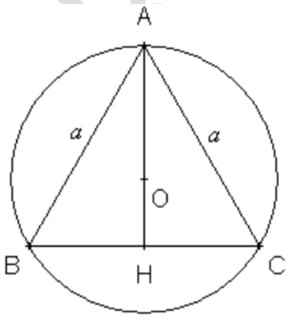
On a : $C\in(BC)\cap(CI)$

Donc : $h(C)\in h((BC))\cap h((CI))$ c'est-à-dire : $h(C)\in(DJ)\cap(CI)$

Et puisque : $(DJ)\cap(CI)=\{J\}$ alors : $h(C)=J$

Exercice02 : $6pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts)$ Soit un triangle équilatéral ABC de côté a et H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.
Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ d) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$



Solution : a) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, l'angle BAC mesure $\frac{\pi}{3}$ radians

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos BAC=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

b) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$

1ère méthode : On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\left(-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ se calcule comme celui ci-dessus :

Ainsi : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos ACB=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\frac{a^2}{2}$

2ème méthode : On utilise la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, pour écrire :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AC^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AC^2+\frac{a^2}{2}=-a^2+\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{2}$

c) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

1ère méthode :H est le projeté orthogonal de B sur (AH)

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}^2=AH^2$

On utilise un résultat bien connu qui dit que la hauteur AH du triangle équilatéral mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AH^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\frac{3}{4}a^2$

2ème méthode : On calcule directement : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos BAH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également bissectrice de l'angle BAC de sorte que l'angle BAH mesure $\frac{\pi}{6}$ radians.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}a^2$ On retrouve le même résultat !

d) Calculons : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

1ère méthode : Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que : $OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ et de même pour la longueur OB.

Enfin, l'angle AOB mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians

On calcule donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\times\cos AOB=\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{3}a^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}a^2$

2ème méthode :H est le projeté orthogonal de B sur (OA), de sorte que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires de sens opposé, on aura :

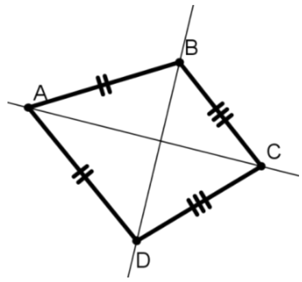
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-OA\times OH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que : $OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ et $OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

On retrouve ainsi : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=-\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{6}a=\boxed{-\frac{1}{6}a^2}$

Exercice03 : $4pts(1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : $AB=AD$ et $CD=CB$



1) Montrer que : les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) Nous prenons dans cette question : $AB=AD=3cm$ et $\left(\overline{BAD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

a) Calculer : BD

b) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) Montrons que : $(AC)\perp(BD)$?

Puisque : $AB=AD$ et $CD=CB$ alors les points A et C appartiennent à la médiatrice (AC) du segment $[BD]$ Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduisons que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

Or $(AC)\perp(BD)$ donc : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) a) Calculons : BD ?. D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons :

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos BAD$

Donc : $BD^2=18-18\cos\frac{\pi}{4}=9\left(2-\sqrt{2}\right)$

D'où : $BD=\sqrt{9\left(2-\sqrt{2}\right)}=3\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) En déduisons $\sin\frac{\pi}{8}$: soit I le point d'intersection des deux diagonales $[BD]$ et $[AC]$

Nous avons ABD est un triangle isocèle et (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

Donc : (AC) est la bissectrice de l'angle BAD

Donc : $(\overline{BAI}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

D'autre part : le triangle ABI est rectangle en I

Donc : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{BI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice04 : $(2,5\,pts)$ Soit (C) un cercle de centre I est de rayon $r=2$ et A et B des points fixes du plan. Et soit M un point variable sur le cercle (C) et soit N un point tel que : $AMNB$ est un parallélogramme

Déterminer l'ensemble (E) des points N lorsque M varie dans le cercle (C)

Solution : Déterminons l'ensemble (E) : On a : $AMNB$ est un parallélogramme

Cela signifie que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

Alors N est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

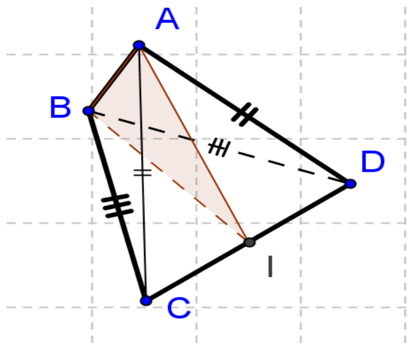
Lorsque M varie dans le cercle (C) alors N varie dans l'image du cercle (C) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Par suite : l'ensemble (E) est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AB}}(I)$ est de rayon $r=2$

Exercice05 : $3pts(2pts+1pts)$ $ABCD$ Un tétraèdre tel que :

$AC = AD$ et $BC = BD$

Soit I le milieu du segment $[CD]$



1)Montrer que : $(CD)\perp(ABI)$

2) En déduire que $(AB)\perp(CD)$

Solution :1) Le triangle ACD est isocèle en A car $AC = AD$

Et I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $(AI)\perp(CD)$ (1)

On a aussi BCD est isocèle en B car $BC = BD$ et I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $(BI)\perp(CD)$ (2)

ET (BI) et (AI) se coupent dans le plan (ABI) Par suite : $(CD)\perp(ABI)$

2) On a : $(CD)\perp(ABI)$ et $(AB)\subset(ABI)$ donc : $(AB)\perp(CD)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien