Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/O sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**
- ✓ **Géométrie dans l'espace**

Exercice01 : $(2,5pts)$

$ABCD$ Un rectangle de centre O et $S_{(BD)}$ est la Symétrie axiale d'axe (BD)

Les points : A' , C' les images respectives des points A , C par $S_{(BD)}$

Montrer que : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

Solution : On a : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$ et O le milieu du segment $[AC]$

Donc $S_{(BD)}(O)=O'$ est aussi le milieu du segment $[A'C']$ car la symétrie axiale conserve le milieu

Or : $O\in(BD)$ donc : $S_{(BD)}(O)=O$

Donc : O le milieu du segment $[A'C']$ et de $[AC]$

Donc : les segments $[A'C']$ et de $[AC]$ ont le même milieu O

Par suite $AA'CC'$ est un parallélogramme

Et on a aussi : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$ donc $AC=A'C'$ (car la symétrie axiale

Conserve les distances) Par conséquent : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

Exercice02 : $(2,5pts)$ *Soit* un point fixe A du plan et soit h une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $3\overrightarrow{MM'}+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

Montrer que : h est une homothétie et Trouver le centre et le rapport k de cette homothétie

Solution : pour chaque point M du plan nous avons :

$h(M)=M'$ Équivaut à : $3\overrightarrow{MM'}+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

Équivaut à : $3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}\right)+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

Équivaut à : $-\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AM'}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$

Cela veut dire que : h est une homothétie de centre A et de rapport $k=\frac{1}{3}$

Exercice03 : $3,5pts(0,5pts+1,5pts+1,5pts)$

Soit IAB un triangle et soient les points C et D tels que : $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ et $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

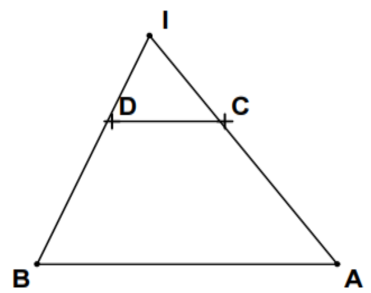
On considère l'homothétie h de centre I et de rapport $k=\frac{1}{3}$

1) Faite une figure

2) Montrer que : $h(A)=C$ et $h(B)=D$

3) Montrer que : $AB=3CD$

Solution :1) La figure



2) a) Montrons que : $h(A)=C$

On a : $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ceci signifie : que l'image de A par l'homothétie h est C c'est-à-dire : $h(A)=C$

b) Montrons que : $h(B)=D$: Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

On a : $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ donc : $2\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB}\right)+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BD}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{ID}+2\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB}\right)+3\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$

Donc : $5\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{DI}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}$ ceci signifie que : $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

Par suite : $h(B)=D$

3) Montrons que : $AB=3CD$

On a : : $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ et par suite : D'après la propriété caractéristique on obtient : $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

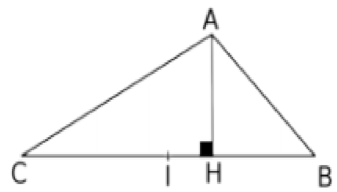
Par passage à la norme on obtient : $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $CD=\left|\frac{1}{3}\right|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $CD=\frac{1}{3}AB$ par suite : $AB=3CD$

Exercice04 : $6\,pts(2\,pts+2\,pts+2\,pts)$ Considérons un triangle ABC tels que :

$BAC=\frac{2\pi}{3}$ et $AC=2$ et $AB=\sqrt{3}-1$



1) a) Montrer que : $BC=\sqrt{6}$ b) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}$

2)Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Calculer : BH

Solution : 1) a) Montrons que : $BC=\sqrt{6}$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC nous obtenons :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos BAC$

$BC^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4-4\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\frac{2\pi}{3}$

$BC^2=8-2\sqrt{3}-4\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ on a : $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$BC^2=8-2\sqrt{3}+4\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$BC^2=8-2\sqrt{3}+4\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{1}{2}=6$

Donc : $BC=\sqrt{6}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=BA^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\frac{2\pi}{3}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{3}-1\right)\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+1$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\sqrt{3}-1$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}$

2)Calculons : BH

On a : H le projeté orthogonal de A sur (BC) et puisque : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=3-\sqrt{3}>0$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH\times BC$

Donc : $\boxed{BH=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}$

Exercice05 : $2,5pts(1pts+1pts+0,5pts)$ ABCD est un carré de côté 2cm.

Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{CM}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$

1) Ecrire $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ en en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$,

2) a) Calculer $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}$

b) Que peut-on dire pour les droites (AN) et (BM) ?

Solution : <u>CONSEILS</u> : Utilisez la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et les écrire en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$ car : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$

2)a) $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\left(\overrightarrow{DC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}\right)$ et, en développant :

$$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}+\frac{5}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\frac{25}{16}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$$

On a : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$ et $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}=0$ car $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CD}^2=-CD^2=-2^2=-4$

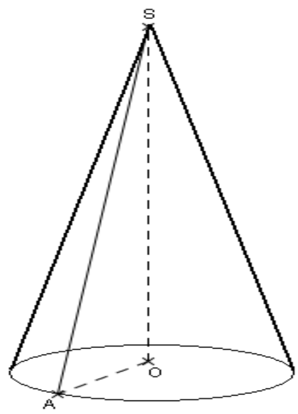
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=BC^2=2^2=4$ et

D'où : $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=0-\frac{5}{4}\times4+\frac{5}{4}\times4+\frac{25}{16}\times0=0$

b) On a : $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=0-\frac{5}{4}\times4+\frac{5}{4}\times4+\frac{25}{16}\times0=0$

Donc : $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, par suite : (AN) et (BM) sont perpendiculaires

Exercice06 : $3pts(1pts+1pts+1pts)$ On considère une bougie conique Représentée ci-contre (la forme d'un Cône droit)



Le rayon OA de sa base est 2,5 cm.

La longueur du segment [SA] est 6,5 cm.

1) Donner la nature du triangle SAO et Montrer que la hauteur SO de la bougie est 6 cm.

2) Calculer le volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie ; on donnera la valeur arrondie au dixième de cm^3 ?

3) Calculer l'angle $\widehat{ASO}$; on donnera la valeur arrondie au degré.

Solution :1) Le triangle SAO est rectangle en O ; on peut donc utiliser Le théorème de Pythagore et On trouve : $OS=\sqrt{36}=6cm$

2) Calcul du volume : si B L'aire de la base et $V=\frac{1}{3}B\times h=\frac{\pi\times r^2\times h}{3}$

$V=\frac{\pi\times AO^2\times OS}{3}=\frac{\pi\times2.5^2\times6}{3}=12.5\pi cm^3$ Valeur exacte

Le volume de la bougie est $V \simeq 39.3cm^3$ Valeur approchée

3) Le triangle SAO est rectangle en O ; on peut donc utiliser les formules trigonométriques pour déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ASO}$: $Cos\left(ASO\right)=\frac{OS}{AS}=\frac{6}{6.5}=\frac{12}{13}$ et d'après la calculatrice, $\widehat{ASO}\approx 23°$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien