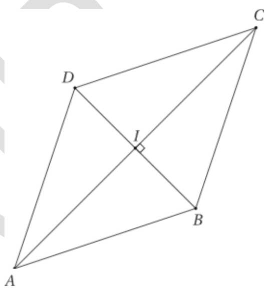
Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/P sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE

Exercice01 : $(2,5\,pts)$ ABCD est un losange dont les diagonales mesurent : AC=12 et BD=6

Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$



Solution : Il est possible ici de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{BC}$ en utilisant la relation de Chasles et en faisant intervenir le point *I* : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$

On peut alors calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$$

Comme les vecteurs : $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}$ est nul ; pour la même raison le produit scalaire $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ est lui aussi nul.

De plus : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}$; $IB=\frac{1}{2}DB=3$ et $IC=AI=\frac{1}{2}AC=6$

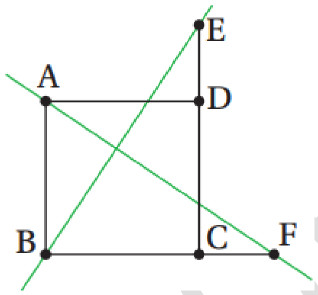
Par conséquent : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{IB}^2=AI^2-IB^2=6^2-3^2=36-29=27$

Exercice02 : $(3\,pts)$ ABCD est un carré de côté c.

Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Montrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

Solution : CONSEILS : Utilisez la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ et les écrire en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis calculez leur produit scalaire.



$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}\right)$ et, en développant :

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\frac{9}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$ car $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2=-AB^2=-c^2$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^2=BC^2=c^2$

D'où : $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=0-\frac{3}{2}c^2+\frac{3}{2}c^2+\frac{9}{4}\times 0=0$

Donc : $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux, par suite : (AF) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice03 : $6\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts)$

Soit ABC un triangle tel que et $AB=6$ et $AC=5$ et $BC=7$

1) Calculer $\cos BAC$

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$

3) Soit K la projection orthogonale du point A sur la droite (BC) ; Calculer : BK

Solution : 1) Calculons $\cos BAC$?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos BAC$

Donc : $\cos BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

Donc : $\cos BAC=\dfrac{36+25-49}{60}=\dfrac{1}{5}$

2) a) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times5\times\dfrac{1}{5}=6$

b) déduction que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$?

On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA^2-6=36-6=30$

3) Calculons : BK

On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$ et puisque K est la projection orthogonale du point A sur la droite (BC)

Alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC}=30$

Exercice04 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ ABC un triangle tel que : $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et m un paramètre réel

Soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=2m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{MB}-3\left(m+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{MC}$$

1) Monter que : pour tout réel m f est une translation dont trouvera son vecteur

2) Déterminer l'image de la droite (BC) par la translation f et en déduire l'image de la droite (AB) par la translation f

Solution :1) Montrons que : pour tout réel m f est une translation dont trouvera son vecteur

Soit M un point du plan (P) et M' son image par la transformation f

On a : $\overrightarrow{MM'}=2m\overrightarrow{MA}+\left(m+\dfrac{3}{2}\right)\overrightarrow{MB}-3\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MM'}=2m\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}-3m\overrightarrow{MC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MM'}=2m\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}-3m\overrightarrow{MC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MM'}=m\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\right)+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$$

$\overrightarrow{MM'} = m\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}\right)+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$

$\overrightarrow{MM'} = m\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et comme : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ alors : $3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Alors : $\overrightarrow{MM'} = m.\vec{0}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

On a donc : $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}(M)=M'$

Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

2)Déterminons l'image de la droite (BC) par la translation : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}$

On a : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc: les points A ; B *et* C sont alignés et $\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ est un vecteur directeur de (BC)

Alors : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}\left((BC)\right)=(BC)$ et puisque : $(AB)=(BC)$ car les points A ; B *et* C sont alignés

Alors : $t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}\left((AB)\right)=t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}\left((BC)\right)=(BC)$

Exercice05 : $5,5pts(1pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts)$

Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=5$

Et soit I le point du segment $[AB]$ tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
2) Calculer les distances : IA et IB
3) Montrer que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$
4) Déterminer (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$

Solution : $AB=5$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrons que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=4\left(-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

2) Calculons les distances IA et IB : On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\left\|\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AI=\frac{1}{5}AB=\frac{1}{5}\times5=1$ Par suite : $IB=AB-AI=4$

3) Montrons que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

Soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=4\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+IA^2+IB^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\vec{0}\right)+1^2+4^2$

Par suite : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

4) Déterminons l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $4MA^2 + MB^2 = 37$?

On a : $4MA^2 + MB^2 = 5MI^2 + 17$ Donc : $5MI^2 + 17 = 37$

Cela équivaut à dire que : $MI^2 = 4$

Par conséquent : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $4MA^2 + MB^2 = 37$

Est le cercle de centre I et de rayon $R = 2$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien