Correction : Devoir surveiller n°6/Q sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**

Exercice01 : $4pts(1pts\times 4)$

ABC un triangle équilatéral. M , N et P sont les milieux des segments $[AB]$; $[AC]$ et $[BC]$ et I est le point d'intersection des médianes : (AP) ; (BN) et (CM)

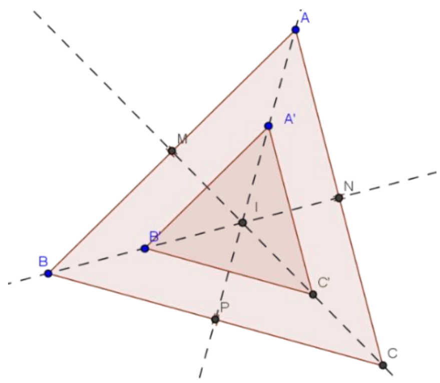
A' , B' et C' sont respectivement les images des points : A , B et C par l'homothétie h de centre I et de rapport $k=\frac{1}{2}$

1) Faite une figure et monter que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

2) Monter que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

3) Monter que : $\frac{L}{L'}=2$ .sachant que L est le périmètre du triangle ABC et L' est le périmètre du triangle $A'B'C'$

4) Monter que : $\frac{S}{S'}=4$ .sachant que S est la surface du triangle ABC et S' est la surface du triangle $A'B'C'$



Solution :2) Montrons que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

On a $\begin{cases} h(A)=A' \\ h(B)=B' \end{cases}$ donc $\overrightarrow{A'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|=\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\|$ par suite : $A'B'=\frac{1}{2}AB$ D'où : $\frac{AB}{A'B'}=2$

3) Montrons que : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

On a : $A'B'=\frac{1}{2}AB$

De même on montre que : $A'C'=\frac{1}{2}AC$ et aussi $B'C'=\frac{1}{2}BC$

Et puisque : $AB=AC=BC$ alors : $A'B'=A'C'=B'C'$
D'où : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

4) Montrons que : $\frac{L}{L'}=2$?

On a : $\frac{AB}{A'B'}=2$ et $\frac{AC}{A'C'}=2$ et $\frac{BC}{B'C'}=2$ donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$

Donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{L}{L'}$

Donc : $\frac{L}{L'}=\frac{AB}{A'B'}=2$

5) Montrons que : $\frac{S}{S'}=4$? On a : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ et $C=C'$

Car l'homothétie conserve la mesure des angles

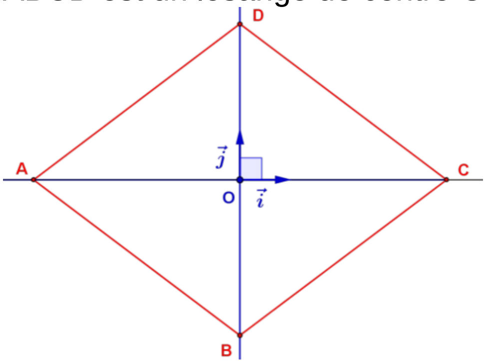
Or : la surface du triangle ABC est $S=\frac{1}{2}AC\times BC\times \sin C$ et la surface de $A'B'C'$ est

$S'=\frac{1}{2}A'C'\times B'C'\times \sin C'$

Par conséquent : $\frac{S}{S'}=\frac{AC\times BC\times \sin C}{A'C'\times B'C'\times \sin C'}=\frac{AC\times BC}{A'C'\times B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{BC}{B'C'}=2\times 2=4$

Exercice02 : $6pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts+1,5pts)$

ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



Calculer les produits scalaires suivants : 1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ 2) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ 4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Solution :1) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

O est le pied de la hauteur du triangle ADC issue de D

Donc : O étant le projeté orthogonal de D sur la droite (AC)

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=AC\times AO=8\times 4=32$ car : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens

2)Calculons : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$

O est le pied de la hauteur du triangle OBC issue de C

Donc : O étant le projeté orthogonal de C sur la droite (BO)

Donc : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}^2=BO^2=3^2=9$

3)Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$

On a : ABCD est un losange donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

Dans le triangle rectangle OAB, j'utilise le théorème de Pythagore :

On a donc : $AB^2=OA^2+OB^2$ c'est-à-dire : $AB^2=4^2+3^2=25$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=AB^2=25$

4)Calculons : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

O est le pied de la hauteur du triangle DBC issue de C

Donc : O étant le projeté orthogonal de C sur la droite (BO)

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BO}=BD\times BO$ car : $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires et de même sens

Donc : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=6\times 3=18$

Exercice03 : $4pts(1pts+1pts+1pts+1pts)$

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : $AB=AD$ et $CD=CB$

1) Montrer que : les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

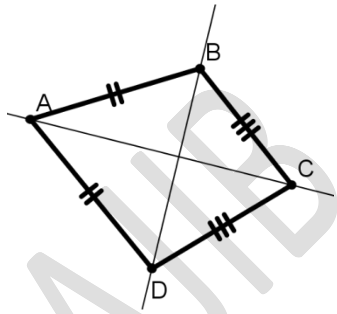
3) Nous prenons dans cette question : $AB=AD=3cm$ et $\left(\overline{BAD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

a) Calculer : BD

b) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) Montrons que : $(AC)\perp(BD)$?

Puisque : $AB=AD$ et $CD=CB$ alors les points A et C appartiennent a la médiatrice (AC)
Du segment $[BD]$
Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires



2) En déduisons que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

Or $(AC)\perp(BD)$ donc : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

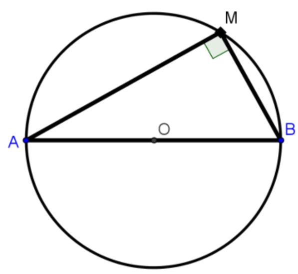
3) a) Calculons : BD ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons :
$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\cos BAD$
$BD^2=18-18\cos\frac{\pi}{4}=9\left(2-\sqrt{2}\right)$
D'où : $BD=\sqrt{9\left(2-\sqrt{2}\right)}=3\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) En déduisons $\sin\frac{\pi}{8}$:Soit I le point d'intersection des deux diagonales $[BD]$ et $[AC]$
Nous avons ABD est un triangle isocèle et (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$
Donc : (AC) est la bissectrice de l'angle BAD
Donc : $\left(\overline{BAI}\right)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$
D'autre part : le triangle ABI est rectangle en I
Donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{BI}{AB}=\frac{\frac{1}{2}\times3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice04 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ Soient A et B deux points distincts du plan tel que : $AB=4$
1) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$
2) Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

Solution : soit M un point du plan
1) $M\in(E)$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$
Équivaut à : $(AM)\perp(BM)$
Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

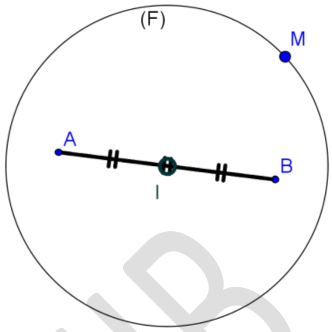


Par conséquent : l'ensemble (E) des points M du plan tel que :
$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

2) $M\in(F)$ Équivaut à : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

Soit I le milieu du segment $[AB]$ donc D'après le théorème de la médiane dans MAB on a :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{16}{4}$



$M \in (F)$ Équivaut à : $MI^2 - \frac{16}{4} = \frac{9}{4}$

Équivaut à : $MI^2 = \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{25}{4}$

Équivaut à : $MI = \frac{5}{2}$

Par conséquent : l'ensemble (F) des points M du plan est le cercle de centre I et de rayon $R = \frac{5}{2}$

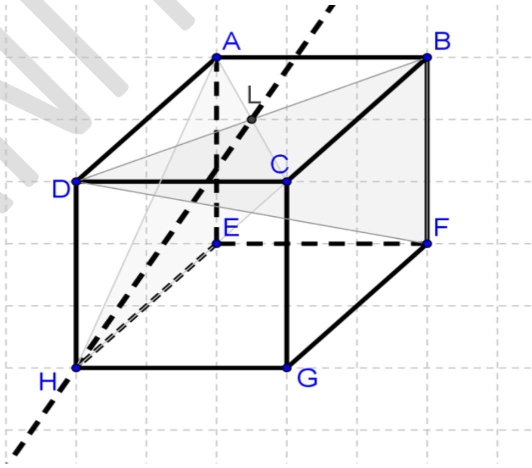
Exercice 05 : $3pts(1,5pts + 1,5pts)$ Soit $ABCDEFGH$ un cube de l'espace

1) Déterminer et représenter la droite (Δ) d'intersection des plans (ACH) et (BDF)

2) Soient I et J les centres des carrés $EFGH$ et $ABFE$ respectivement
Déterminer la droite (Δ') d'intersection des plans (IJE) et (ADH)

Solution : 1) On a : $A \in (ACH)$ et $A \notin (BDF)$

Donc $(ACH) \neq (BDF)$ (1)



On a : $H \in (ACH)$

Puisque : $DH = BF$ et $(DH) \parallel (BF)$

Alors : $BDHF$ est un parallélogramme

Par suite les points $B ; D ; H ; F$ sont coplanaires

Donc : $H \in (BDF)$ Et par suite : $H \in (BDF) \cap (ACH)$ (2)

Soit L Le point intersection des droites (AC) et (BD) donc : $L \in (ACH)$ et $L \in (BDF)$

Donc $L \in (BDF) \cap (ACH)$ (3)

Par suite : de (1) et (2) et (3) en déduit que :

$(BDF) \cap (ACH) = (HL)$

2) On a : $I \in (IJE)$ et $I \notin (ADH)$

Donc $(IJE) \neq (ADH)$

On a : $E \in (IJE)$ et $E \in (ADH)$ car: $(DH) \parallel (AE)$

Donc : $E \in (ADH) \cap (IJE)$

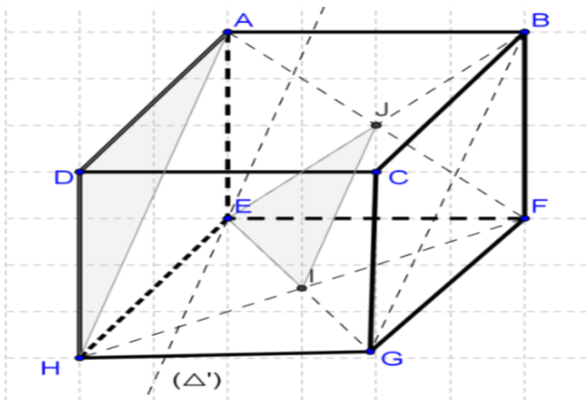
Par suite : $(ADH) \cap (IJE) = (\Delta')$

On considère le triangle AHF : on a I et J les milieux respectifs des segments $[HF]$ et $[AF]$

Donc : $(IJ) \parallel (AH)$

Donc : on a : $(IJ) \parallel (AH)$ et $(IJ) \subset (IJE)$ et $(AH) \subset (ADH)$ et $(ADH) \cap (IJE) = (\Delta')$

Donc : (Δ') est la droite qui passe par E et parallèle a (IJ) et (AH)



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.