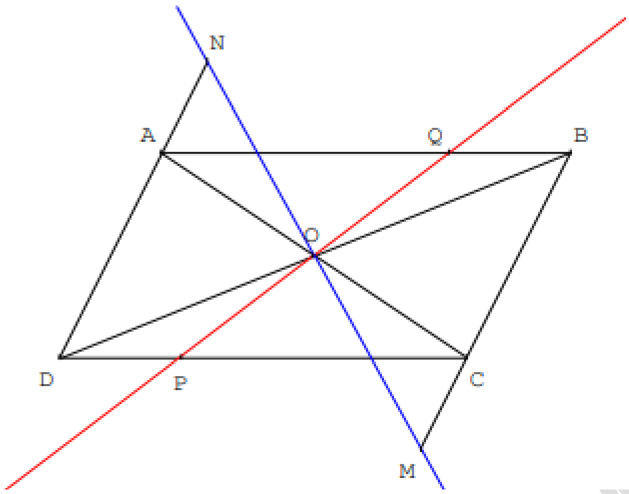
Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/R sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**

Exercice01 : $4,5\,pts(1,5\,pts\times3)$ $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Une droite (D) passant par O coupe les droites (DC) en P et (AB) en Q. Une droite (Δ) passant par O coupe les droites (AD) en N et (BC) en M



1) Quelles sont les images des points A, B, C, D par la symétrie de centre O ?
2) Quelles sont les images des droites (D), (BC) et (CD) par la symétrie de centre O ?
3) Démontrer que le quadrilatère MPNQ est un parallélogramme

Solution : S_O est une symétrie centrale de centre O

1) Par la symétrie de centre O, l'image de A est C : $S_O(A)=C$

L'image de B est D : $S_O(B)=D$

L'image de C est A : $S_O(C)=A$

L'image de D est B : En effet, l'intersection des diagonales d'un parallélogramme est un centre de symétrie Donc : $S_O(D)=B$

2) Puisque l'image de O est O et que l'image d'une droite est une droite parallèle (par une symétrie centrale), alors l'image de (D) est (D).
Comme l'image de B est D et que l'image de C est A, alors l'image de (BC) est (DA).
Comme l'image de C est A et que l'image de D est B, alors l'image de (CD) est (AB).
3) Démontrons que le quadrilatère MPNQ est un parallélogramme.
L'image de (D) est (D) et l'image de (BC) est (DA), donc l'image de M intersection de (D) et (BC) est N intersection de (D) et (DA).
L'image de (D) est (D) et l'image de (CD) est (AB), donc l'image de P intersection de (D) et (CD) est Q intersection de (D) et (AB).
Puisque, par la symétrie de centre O, l'image de M est N et l'image de P est Q, alors le quadrilatère MPNQ a un centre de symétrie, c'est donc un parallélogramme.

Exercice02 : $(2\,pts)$ On considère deux points A et B et une homothétie h qui transforme A en C et laisse invariant le point B de sorte que : $\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
Trouver le rapport k de cette homothétie

Solution : nous avons : $h(A)=C$ et $h(B)=B'=B$

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie

On a ; $\overrightarrow{CB}=k\overrightarrow{AB}$ (1)

D'autre part nous avons :

$\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{AB}$ (2)

De (1) et (2) nous déduisons : $k=4$

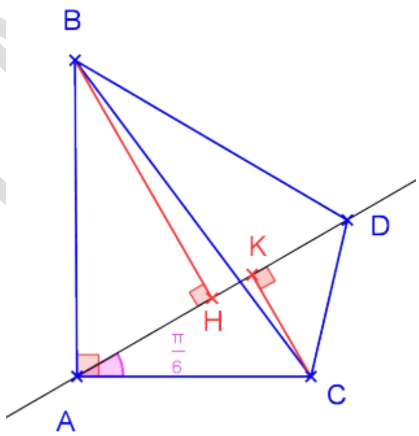
Exercice03 : $4\,pts(1pts\times 4)$ Considérons un triangle ABC rectangle en A tel que :

AC=5 et AB=4 et $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit D le point du plan vérifiant AD=4 et $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

H est le pied de la hauteur du triangle ABD issue de B et K est le pied de la hauteur du triangle ACD issue de C. Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ 3) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$ 4) $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)$

Solution : 1) Calculons : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$



Le triangle ABC est rectangle en A donc le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C est A, Donc : A étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2=BA^2=AB^2=4^2=16$

2)Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Le triangle ABH est rectangle en H donc le pied de la hauteur du triangle ABH issue de B est H, Donc : H étant le projeté orthogonal de B sur la droite (AH)

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}^2=AH^2$

Dans le triangle rectangle ABH : $BAH=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ donc :

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{AH}{AB}=\frac{1}{2}$$

Donc : $AH=\frac{1}{2}AB=2$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AH^2=2^2=4$

3) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$

Le triangle ACK est rectangle en K donc le pied de la hauteur du triangle ACK issue de C est K, Donc : K étant le projeté orthogonal de C sur la droite (AK) = (AD)

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AK}^2=AK^2$

On a : $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{AK}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors : $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ et donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{75}{2}$

4) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ Or, les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}=0$ et par suite : $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=4$

Exercice04 : $(2\,pts)$ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même norme.

Démontrer que les vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

Solution : Calculons : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

On applique « l'identité remarquable du produit scalaire » :
$\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ or $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

Donc : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=0$

Par suite : les vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

Exercice05 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ ABC un triangle tel que : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et m un paramètre réel

On considère une transformation T du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :
$\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$

1) Montrer que pour tout réel m on a T est une translation dont on déterminera son vecteur
2) Déterminer l'image de la droite (BC) par la translation T et en déduire l'image de la droite (AB) par T

Solution : 1) Soit M un point M du plan :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{MB}-4m\overrightarrow{MC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{MC}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

Et puisque : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MM'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(M)=M'$

Donc : $T=t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$ est la translation dont de vecteur $\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

2) Déterminons l'image de la droite (BC) par la translation $T=t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$

On a : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les points A et B et C sont des points alignés

Posons : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(B)=B'$ signifie que : $\overrightarrow{BB'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $B'\in(BC)$

De même si $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(C)=C'$ signifie que : $\overrightarrow{CC'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $C'\in(BC)$

Donc : $(B'C')=(BC)$ et par suite : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(BC)=(BC)$ et puisque : points A et B et C sont des points alignés alors : $(AB)=(BC)$ par suite : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(AB)=(BC)$

Exercice06 : $4,5pts(1,5pts+1,5pts+1,5pts)$ Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ et tels que les points A et B sont fixes avec : $AB=2$ et les points C et D sont variables avec : $AD=3$ et E un point tel que : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$

1) Déterminer l'ensemble (E) des points D

2) Déterminer l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)

3) Représenter les ensemble (E) et (F)

Solution : 1) Déterminons l'ensemble (E) des points D

On a : $D\in(E)$ signifie que : $AD=3$

Et par suite l'ensemble (E) est le cercle de centre A est de Rayon : $r=3$

2) déterminons l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)

On a : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ cela signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(D)=C$

Et puisque l'ensemble (E) des points D est le cercle de centre A est de rayon $r=3$

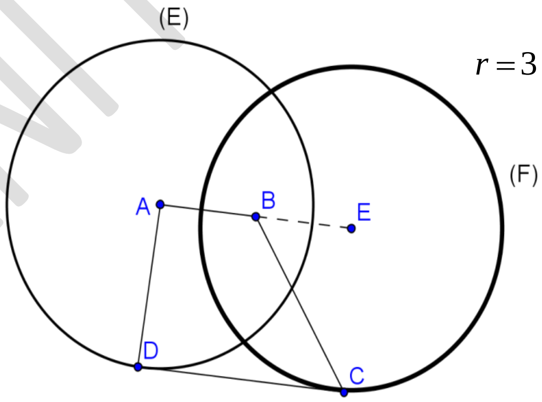
Alors (F) est l'image (E) par la translation $t_{2\overrightarrow{AB}}$

Par suite (F) est le cercle de centre $t_{2\overrightarrow{AB}}(A)$ est de rayon $r=3$

Or on a : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$ cala signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(A)=E$

Par conséquent : (F) est le cercle de centre E est de rayon $r=3$

3) Voir la figure



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien