# *Correction :* Devoir surveiller n°6/S sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**

**Exercice01 :** $4,5pts(1,5pts\times 3)$

Soit ABC un triangle tel que et $AB=2\sqrt{3}$ et $AC=1$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$

1) Déterminer une mesure de l'angle $BAC$

2) Soit $I$ le milieu du segment $[BC]$

a) Calculer $BC$ b) En déduire la distance $AI$

**Solution :** 1) Déterminons une mesure de l'angle $BAC$

On a : $\cos BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$ Donc : $\cos BAC=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}\times 1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos BAC=-\cos\dfrac{\pi}{6}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Donc : Une mesure de l'angle $BAC$ est $\dfrac{5\pi}{6}$ rad ou $150^{\circ}$

2) $I$ le milieu du segment $[BC]$

a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ C'est-à-dire : $BC^2=12+1+6=19$ par suite : $BC=\sqrt{19}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AI^2=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\dfrac{BC^2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(12+1-\dfrac{19}{2}\right)=\dfrac{7}{4}$ Par suite : $AI=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

**Exercice02 :** $(2pts)$ Soient $A$ et $B$ deux points fixes du plan. Soit $T$ une transformation du plan qui transforme chaque point $M$ en $M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Montrer que $T$ est une homothétie de centre $I$ le milieu du segment $[AB]$ et déterminer son rapport k

**Solution :** pour chaque point $M$ du plan nous avons : $T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IM'}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$ Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=3\overrightarrow{MI}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$ or on a : $I$ le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=-3\overrightarrow{IM}$

Cela veut dire que : $h$ est une homothétie de centre $I$ le milieu du segment $[AB]$ et de rapport : $k=-3$

**Exercice03 :** $3pts(2pts+1pts)$ Soient deux points fixes distincts $A$ et $B$ du plan.

Soit $T$ une transformation du plan qui transforme chaque point $M$ en $M'$ tel que :

$\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

1) En utilisant la propriété caractéristique d'une translation montrer que $T$ est une translation

2) Déterminer un vecteur de la translation $T$

**Solution :1)** Soient $M$ et $N$ deux points du plan nous avons :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$ (1)

$T(N)=N'$ Équivaut à : $\overrightarrow{N'A}-\overrightarrow{N'B}+5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$ (2)

$(2)-(1)$ Donne : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{N'A}+\overrightarrow{N'B}-5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AN'}+\overrightarrow{N'B}+\overrightarrow{BM'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'N'}+\overrightarrow{N'M'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$

Et d'après la propriété caractéristique d'une translation cela veut dire que $T$ est une translation

2) déterminons un vecteur de la translation $T$ :

$T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

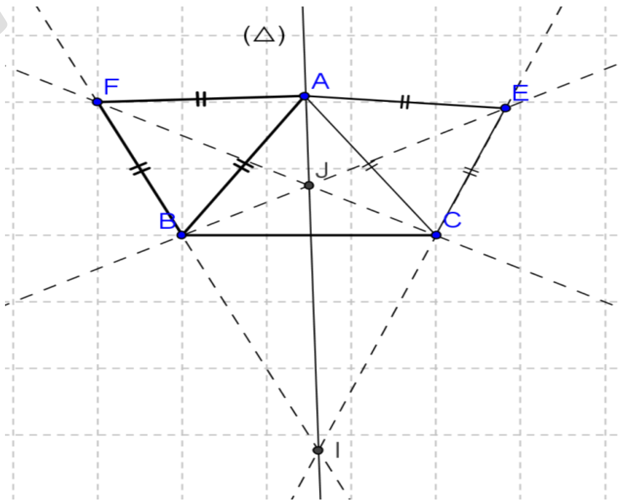
Par suite : $T$ est la translation de vecteur $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $T=t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}$

**Exercice04 :** $(2,5pts)$ $ABC$ Un triangle isocèle de sommet A ; On construit à l'extérieur de $ABC$ deux triangles $ABF$ et $ACE$ équilatérales

Les droites $(BF)$ et $(CE)$ se coupent en un point $I$ et les droites $(FC)$ et $(BE)$ se coupent en un point $J$ et Soit $(\Delta)$ l'axe de symétrie du triangle $ABC$

Montrer que les points : $A$ , $I$ et $J$ sont alignés

**Solution** : Montrons que les points : $A$ , $I$ et $J$ sont alignés




Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie axiale d'axe $(\Delta)$

Les deux triangles $ABF$ et $ACE$ sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta)$

On a : $S_{(\Delta)}(B)=C$ et $S_{(\Delta)}(E)=F$ donc :

$S_{(\Delta)}(BE)=(CF)$

Et puisque : $(BE)\cap(CF)=\{J\}$ alors $J\in(\Delta)$

Et puisque les points : $A$ , $I$ et $J$ appartiennent à la droite $(\Delta)$ alors les points $A$ , $I$ et $J$ sont alignés

**Exercice05 :** $4pts(2pts+2pts)$ $A$ et $B$ deux points fixes

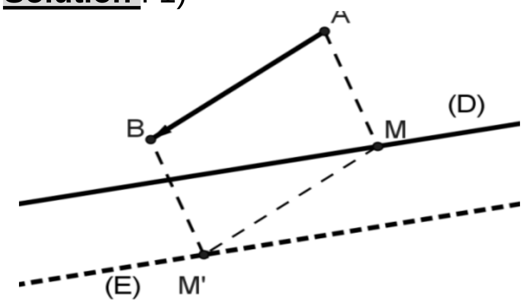
1) Soit une droite $(D)$ et $M$ un point qui varie sur la droite $(D)$

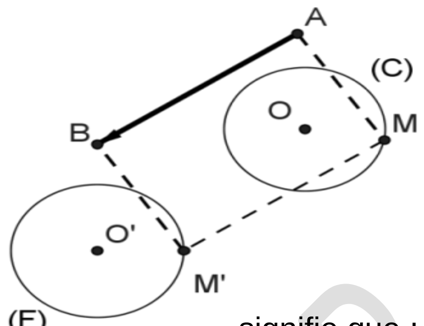
Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M'$ tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

2) $(C)$ est un cercle et $M$ un point qui varie sur le cercle $(C)$

Déterminer l'ensemble $(F)$ des points $M'$ tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

**Solution** : 1)




On a : $MABM'$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$

Donc : $M'$ est l'image $M$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque $M$ un point qui varie sur la droite $(D)$ alors son image $M'$ varie sur l'image de la droite $(D)$ et puisque l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle

Donc : l'ensemble $(E)$ des points $M'$ est la droite qui passe par $M'$ est parallèle a la droite $(D)$

2) On a : $MABM'$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$

Donc : $M'$ est l'image $M$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque $M$ un point qui varie sur le cercle $(C)$ alors son image $M'$ varie sur l'image du cercle $(C)$

Et puisque l'image d'un cercle par une translation est un cercle

Donc : l'ensemble $(F)$ des points $M'$ est l'image du cercle $(C)$ par la translation

**Exercice06 :** $4pts(2pts+2pts)$ Soit $A$ et $B$ deux points dans le plan tel que : $AB = 10$

Et soit $I$ le milieu du segment $[AB]$

1) Déterminer $(\Delta)$ l'ensemble des points $M$ du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 10$

2) Déterminer $(C)$ l'ensemble des points $M$ du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 68$

**Solution :** $AB = 10$ et le milieu du segment $[AB]$

**1)** Déterminons $(\Delta)$ l'ensemble des points $M$ du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 10$

Soit : $H$ la projection orthogonale du point $M$ sur la droite $(AB)$

Donc : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = IH.AB$

Equivaut à : $IH.AB = 10$ Equivaut à : $IH = 1$

Puisque $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens alors : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$

Et par suite : $(\Delta)$ est la droite qui passe par le point $H$ et tel que :

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ et perpendiculaire a $(AB)$

**2)** Déterminons $(C)$ l'ensemble des points $M$ du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 68$

Donc : $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

Donc : $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

Donc : $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2$

Puisque $I$ le milieu du segment $\left[AB\right]$ donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\vec{0}\right)+50$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+50$ par suite on a : $2MI^2+50=68$

Donc : $MI^2=9$ Cela équivaut à dire que $MI=3$

Par conséquent : l’ensemble $\left(C\right)$ des points $M$ du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$ est le cercle de centre $I$ et de rayon $R=3$

*C’est en forgeant que l’on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien*