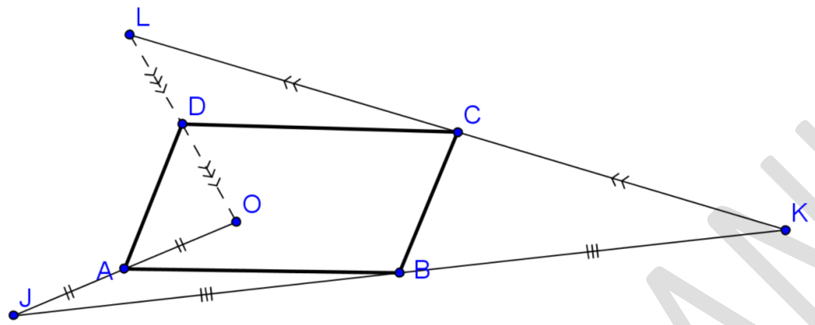
**Tronc commun Sciences BIOF**

# *Correction* : Devoir surveiller n°6 :t sur les leçons suivantes :

- ✓ Les Transformations du plan
- ✓ PRODUIT SCALAIRE

**Exercice01 :** $(2,5pts)$ $ABCD$ un parallélogramme et $O$ un point qui n'appartient pas à ces cotés
Et soient : $J$ le symétrique de $O$ par rapport a $A$
Et $K$ le symétrique de $J$ par rapport a $B$
Et $L$ le symétrique de $K$ par rapport a $C$
Montrer que : $O$ est le symétrique de $L$ par rapport a $D$

**Solution** :




On a : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KL}$ donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OK}+2\overrightarrow{KC}$ car $C$ le milieu du segment $[KL]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JK}+2\overrightarrow{KC}$

Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+2\overrightarrow{BK}+2\overrightarrow{KC}$

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right)$ car $A$ le milieu du segment $[OJ]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{BC}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right)$ or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ un parallélogramme

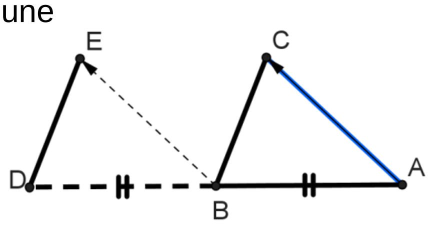
Donc : $\overrightarrow{OL}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{OD}$

Donc : $D$ est le milieu du segment $[IK]$ et par suite : $S_D(L)=O$

**Exercice02 :** $2,5pts(0,5pts+1pts+1pts)$

$ABC$ Un triangle et $D$ le symétrique du point $A$ par rapport à $B$ et $E$ L'image du point $B$ par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$

1) Faire une figure
2) Montrer que le triangle $BDE$ est l'image du triangle $ABC$ par une translation dont on déterminera son vecteur
3) En déduire que le triangle $ABC$ est l'image du triangle $BDE$ par une translation dont on déterminera son vecteur




**Solution** : $t_{\overrightarrow{AC}}(B)=E$ Signifie $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$

Donc : $ABEB$ est un parallélogramme

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

ET on a : $D$ le symétrique du point $A$ par rapport à $B$ donc : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(B)=D$

On a aussi : $ABEB$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(C)=E$

Par conséquent : $t_{\overrightarrow{AB}}\left(ABC\right)=BDE$

3) on a : $t_{\overrightarrow{AB}}\left(ABC\right)=BDE$ et par suite : $t_{-\overrightarrow{AB}}\left(BDE\right)=ABC$

Le triangle $ABC$ est l'image du triangle $BDE$ par une translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

*(Car :* $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}$ *donc* $t_{\overrightarrow{BA}}\left(B\right)=A$ *et* $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$ donc : $t_{\overrightarrow{BA}}\left(D\right)=B$ *et et* $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BA}$

Donc : $t_{\overrightarrow{BA}}\left(E\right)=C$ *)*

**Exercice03 :** $3pts(1pts\times 3)$ $\left(C\right)$ un cercle de centre $I$ et de rayon $R=1,5cm$ .

Soit $h$ l'homothétie de centre $I$ et de rapport $k=2$

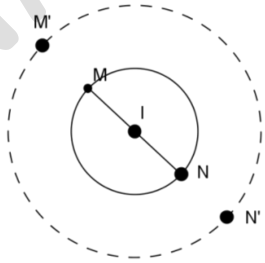
$M$ , $N$ sont deux points de $\left(C\right)$ diamétralement opposés. $M'$ et $N'$ sont leurs images par $h$

1) Faite une figure et monter que : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

2) Monter que : $\overrightarrow{N'M}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$ .

3) Quelle est l'image du cercle $\left(C\right)$ par l'homothétie $h$

**Solution** :1) La figure :




Montrons que : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ?

$h\left(M\right)=M'$ Equivaut à : $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{IM}$

D'autre part : $\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{M'I}+\overrightarrow{IM}$ (relation de Chasles)

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{IM}$

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-2\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}$

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MI}$ et puisque $I$ le milieu du segment $\left[MN\right]$

D'où : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{N'M}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$ ?

On a : $\overrightarrow{N'M}=\overrightarrow{N'M'}+\overrightarrow{M'M}$ (relation de Chasles)

Or on a : $\begin{cases}h\left(M\right)=M'\\ h\left(N\right)=N'\end{cases}$ donc $\overrightarrow{N'M'}=2\overrightarrow{NM}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Et on aussi : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ donc : $\overrightarrow{N'M}=2\overrightarrow{NM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$

4) puisque : $h\left(I\right)=I$ car c'est le centre de l'homothétie $h$

L'image du cercle $\left(C\right)$ par l'homothétie $h$ est le cercle $\left(C'\right)$ de centre $I$ et de rayon :

$R'=2\times 1.5cm=3cm$

**Exercice04 :** $\left(2\,pts\right)$ Soit $ABCD$ un trapèze tel que :

$\left(AB\right)||\left(CD\right)$ et tels que : $AB=2$ et $CD=4$

Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie $h$ qui transforme $A$ en $D$ et
Transforme $B$ en $C$

**Solution :** Soit $h\left(E,k\right)$ : on a : $h\left(A\right)=D$ donc : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$

Donc : les points $E$ ; $A$ et $D$ sont alignés par suite : $E\in\left(AD\right)$

Et On a : $h\left(B\right)=C$ donc : $\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EB}$

Donc : les points $E$ ; $B$ et $C$ sont alignés par suite : $E\in\left(BC\right)$

Donc le centre de l'homothétie $h$ est le point $E$ d'intersection des droites $(AD)$ et $(BC)$

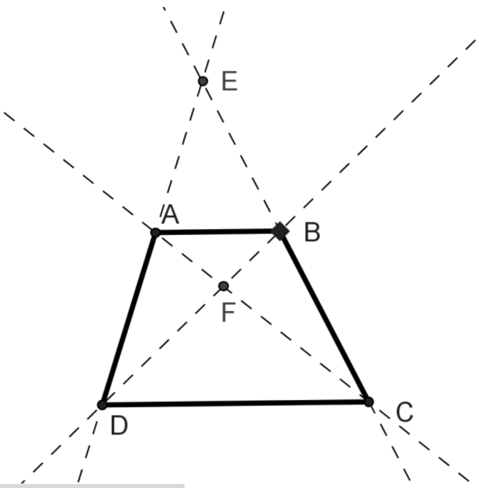
Et puisque : $(AB) \parallel (CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle $EDC$ on a :

$$\frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB} = \frac{4}{2} = 2$$

Et puisque : $\overrightarrow{ED} = k\overrightarrow{EA}$ alors : $\left\|\overrightarrow{ED}\right\| = \left\|k\overrightarrow{EA}\right\|$ c'est-à-dire : $ED = |k|EA$ donc : $\frac{ED}{EA} = |k|$

Et par suite : $|k| = 2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le même sens alors : $k = 2$

Par conséquent : $h(E,2)$

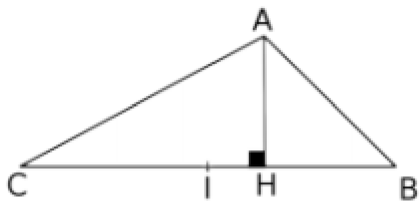



**Exercice05 :** $4pts(1pts + 1,5pts + 1,5pts)$ Considérons un triangle ABC tels que :
BC = 7, AB = 6 et AC = 5

1) a) Calculer : $\cos BAC$

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ En déduire que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 30$

2)Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).




Calculer : $BH$

**Solution :** 1) a) Calculons : $\cos BAC$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans $ABC$ nous obtenons :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos BAC$$

Donc : $\cos(BAC) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$

Donc : $\cos(BAC) = \frac{36+25-49}{2\times 6\times 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

b) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos BAC = 6\times 5\times \frac{1}{5} = 6$

Déduisons que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 30$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2 - 6 = BA^2 - 6 = 36 - 6 = 30$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 30$

2) Calculons : $BH$

On a : H le projeté orthogonal de A sur (BC) et puisque : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30>0$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH\times BC$ c'est-à-dire : Donc : $\boxed{BH=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\frac{30}{7}}$

**Exercice06 :** $6pts(2pts+1pts+3pts)$ Soit $ABCD$ un carré de centre $I$ et $a$ la longueur de son côté ; on construit à l'extérieur un triangle équilatérale $BCE$ (voir figure)

1) Soit $J$ le milieu du segment $[AD]$ et $K$ le milieu du segment $[BC]$

Calculer $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de $a$

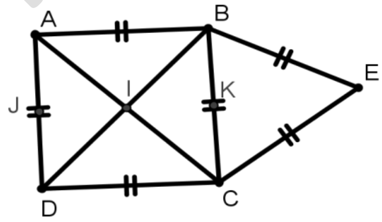
2) a) Montrer que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) En utilisant les résultats de la question b) montrer que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ :

Et en déduire : $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{7\pi}{12}$

**Solution : 1)** Calcul de $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de $a$




On a : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KC}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}$

Et puisque : $(IJ)\perp(KC)$ alors : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}=0$

Et puisque : $I$ le milieu de $[JK]$ alors : $\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\left(-\overrightarrow{IJ}\right)=-\overrightarrow{IJ}^2=-IJ^2$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=-\frac{a^2}{4}$ car $IJ=\frac{a}{2}$

2) a) Montrons que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

$\bullet$Montrons d'abord que les points : $I$ ; $K$ et $E$ sont alignés ?

On a : $EC=EB$ et $IC=IB$ car $ABCD$ un carré

Et on a : $KC=KB$ car $K$ le milieu du segment $[BC]$

Donc : les points : $I$ ; $K$ et $E$ appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : $I$ ; $K$ et $E$ sont alignés

$\bullet$On a : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}\right)\bullet\overrightarrow{IE}$ donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Et puisque : $(KB)\perp(IE)$ alors : $\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}=0$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos\left(\overrightarrow{IK};\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos(0)=IK\times IE$ car $\cos(0)=1$

Or on a : $IK=\frac{a}{2}$ et $IE=IK+KE=IK+\sqrt{CE^2-CK^2}$

Donc : $IE = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}a$

Donc : $\overrightarrow{IB} \bullet \overrightarrow{IE} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} a \times a = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} a^2$

b) déduction que : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) a^2$

On a : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BI} \bullet \left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE}\right)$ donc : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BI}^2 + \overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{IE} = BI^2 + \overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = BI^2 - \overrightarrow{IB} \bullet \overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = KI^2 + KB^2 - \overrightarrow{IB} \bullet \overrightarrow{IE}$ car $BI^2 = KI^2 + KB^2$ (le triangle $IKB$ est rectangle en $K$ )

( $KI = KB = \frac{a}{2}$ )

Donc : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} a^2 \ \frac{a}{2}$ et par suite : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) a^2$

3) Montrons que : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

On a : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = BI \times BE \cos\left(IBE\right)$ donc : $\cos\left(IBE\right) = \frac{\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE}}{BI \times BE}$

Et on a : $IBE = IBC + CBE = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$ et on a $BI = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ et $BE = a$ et $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) a^2$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right) a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Déduction de : $\sin\frac{7\pi}{12}$ ?

On a : $\sin^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} = 1$ donc : $\sin^2\frac{7\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{7\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+2\sqrt{12}}{16}$

Donc : $\sin^2\frac{7\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$ par suite : $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or : $0 \prec \frac{7\pi}{12} \prec \pi$ donc : $\sin\frac{7\pi}{12} \geq 0$ et par suite : $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Calcul de : $\tan\frac{7\pi}{12}$ ?

$$\tan\frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{8+2\sqrt{12}}{-4} = -2-\sqrt{3}$$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*
*'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*