Tronc commun Sciences BIOF

Correction : Devoir surveiller n°6/U sur les leçons suivantes :

- ✓ **Les Transformations du plan**
- ✓ **PRODUIT SCALAIRE**

Exercice01 : $6\,pts(1,5\,pts+1,5\,pts+1,5\,pts+1\,pts+0,5\,pts)$

ABCD est un rectangle de centre O tel que AB=8 et AD=5

1) Calculer les produits scalaires suivants :a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

2) On désigne par α une mesure de l'angle AOB

Calculer $\cos\alpha$ puis en déduire une valeur approchée par défaut à 1 degré près de α

3) H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC). Calculer AK et HK

4)a) Donner la valeur exacte de $\tan HDK$

b) En déduire une valeur approchée à 1 degré près de HDK

Solution : 1)a) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

Le point C se projette orthogonalement en D sur (AD), de sorte que :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=25$$

b) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}$

On « réarrange » le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}$ avant de le calculer :

Le point A se projette orthogonalement en D sur (CD), de sorte que :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}^2=CD^2=64$$

Donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}=64$

c) Calculons : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

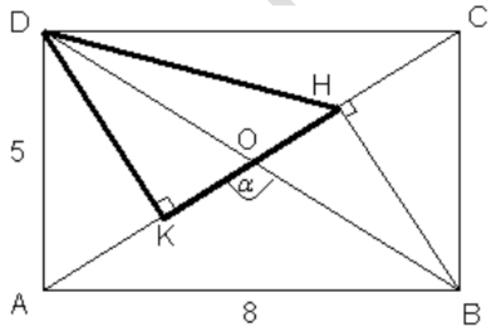
On applique la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire pour calculer :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$

Le point C se projette orthogonalement en B sur (AB), de sorte que :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=64$$

Ainsi : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-64+25=-39$



2) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

D'une part : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}=\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AC}\right).\left(-\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

On a déjà calculé : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-39$

Donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-\frac{39}{4}$

D'autre part : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\times\cos\left(AOB\right)$

D'après le théorème de Pythagore, la diagonale AC du rectangle mesure :
$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$

Donc : La demi diagonales mesurent : $OA=OB=\frac{1}{2}\sqrt{89}$

Ainsi : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\sqrt{89}\times\frac{1}{2}\sqrt{89}\times\cos(\alpha)$

En égalant les deux expressions du produit scalaire, on obtient : $\frac{89}{4}\times\cos(\alpha)=-\frac{39}{4}$

Donc : $\cos(\alpha)=-\frac{39}{89}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle AOB mesure environ 116 ° (à 1 degré près)

3) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}$ ·

D'une part, le point D se projette orthogonalement en K sur (AO).

Ainsi : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AK}$, et puisque les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ *et* $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires de même sens,

Alors : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AK}=AO\times AK=\frac{1}{2}\sqrt{89}AK$

D'autre part : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{25}{2}$

En égalant les deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}$

On obtiendra : $\frac{1}{2}\sqrt{89}AK=\frac{25}{2}$ qui signifie que : $AK=\frac{25}{\sqrt{89}}=\boxed{\frac{25\sqrt{89}}{98}}$

Par symétrie, on déduit la valeur de $HC=\boxed{\frac{25\sqrt{89}}{98}}$

On calcule alors $HK=AC-(AK+HC)$ c'est-à-dire : $HK=\sqrt{89}-2\frac{25}{\sqrt{89}}=\frac{89-50}{\sqrt{89}}=\frac{39}{\sqrt{89}}=\boxed{\frac{39\sqrt{89}}{89}}$

4) a) Dans le triangle HDK rectangle en K, on calcule $\tan HDK=\frac{HK}{DK}$

On calcule la longueur DK en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AKD rectangle en K : $DK^2=AD^2-AK^2=25-\left(\frac{25}{\sqrt{89}}\right)^2=\frac{1600}{89}$

Donc : $DK=\sqrt{\frac{1600}{89}}=\frac{40}{\sqrt{89}}$ et on termine de calculer : $\tan HDK=\frac{HK}{DK}=\frac{\frac{39}{\sqrt{89}}}{\frac{40}{\sqrt{89}}}=\frac{39}{40}$

b) Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle HDK mesure environ 44 ° (à 1 degré près)

Exercice02 : $3,5pts(1pts+1pts+1,5pts)$

Soit ABC un triangle tel que et $AB=5$ et $BC=14$ et $AC=\sqrt{201}$

Soit I le milieu du segment $[BC]$

1) Montrer que : $AI=8$

2) Montrer que : $BAI=\frac{\pi}{3}$

3) Soit H un point du segment $[AB]$ tel que $AH=4$

Montrer que les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

Solution : 1) Montrons que : $AI=8$

On a : Soit I le milieu du segment $[BC]$

D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}(25+201-98)=64$ Par suite : $AI=\sqrt{64}=8$

2) Montrons que : $BAI=\frac{\pi}{3}$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle AIB on a :

$BI^2=AB^2+AI^2-2AB\times AI\cos\left(BAI\right)$

Donc : $\cos\left(BAI\right)=\frac{AB^2+AI^2-BI^2}{2AB\times AI}=\frac{25+64-49}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$ par suite : $\cos\left(BAI\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $BAI=\frac{\pi}{3}$

3) Montrons que les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{AH}\cdot\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AI}\right)=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}=AH^2-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{IH}=AH^2-AH\times AI\cos\left(HAI\right)$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{IH}=16-4\times8\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=16-32\times\frac{1}{2}=16-16=0$

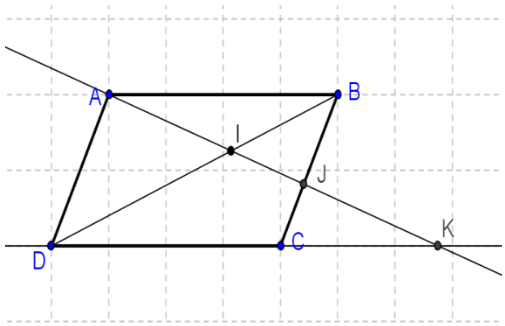
Par suite : Les droites : (AH) et (IH) sont perpendiculaires

Exercice03 : $3pts(1,5pts+1,5pts)$ Soit $ABCD$ un parallélogramme et I un point fixe qui appartient a $[BD]$ et J le point d'intersection des droites (AI) et (BC) et soit K le point d'intersection des droites (AI) et (CD)

Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme B en D

1) Déterminer $h(A)$ et $h(J)$

2) Montrer que : $IA^2=IJ\times IK$



Solution :1) a) Déterminons $h(A)$?

On a : $h(B)=D$ et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

Alors : l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par D est parallèle à (AB) c'est-à-dire (DC)

Par suite : $h((AB))=(CD)$

Et on a : $I\in(AI)$ donc : $h((AI))=(AI)$

Et puisque : $A\in(AI)\cap(AB)$ alors $h(A)\in h((AI))\cap h((AB))$ c'est-à-dire : $h(A)\in(AI)\cap(CD)$

Et on a : $(AI)\cap(CD)=\{K\}$ Donc : $h(A)=K$

b) Déterminons $h(J)$?

On a : $h((AI))=(AI)$ et $h(B)=D$ donc : l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par D est parallèle à (BC) c'est-à-dire (AD)

Par suite : $h((BC))=(AD)$

Et puisque : $J\in(BC)\cap(AI)$ alors $h(J)\in h((BC))\cap h((AI))$ c'est-à-dire : $h(J)\in(AD)\cap(AI)$

Et on a : $(AD)\cap(AI)=\{A\}$ Donc : $h(J)=A$

2) Soit $h(I,k)$: On a : $h(A)=K$ Équivaut à : $\overrightarrow{IK}=k\overrightarrow{IA}$ donc : $IK=|k|IA$ (1)

Et on a : $h(J)=A$ Équivaut à : $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{IJ}$ donc : $IA=|k|IJ$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\frac{IK}{IA}=\frac{IA}{IJ}=|k|$ et par suite : $IA^2=IJ\times IK$

Exercice04 : $3pts(1pts+2pts)$ Soit ABC un triangle

On associe à chaque point M du segment $[BC]$ Le point M' tel que M le milieu du segment $[AM']$

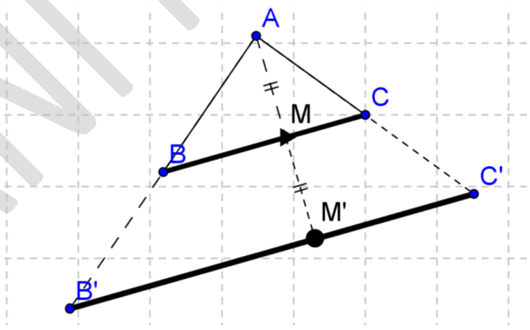
1) Montrer qu'il existe une homothétie h tel que : $h(M)=M'$ pour tous point du segment $[BC]$

2) En déduire l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$

Solution : 1) On a M le milieu du segment $[AM']$ donc :

$\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$

C'est-à-dire : M' est l'image du point M par l'homothétie h de centre A et de rapport : $k=2$



2) Si le point M varie sur Le segment $[BC]$ alors son image M' varie sur l'image du segment $[BC]$ par l'homothétie h de centre A et de rapport : $k=2$

C'est-à-dire : M' varie sur le segment $[B'C']$ avec :

$h(B)=B'$ et $h(C)=C'$

($\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AC}$)

Donc l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$ est le segment $[B'C']$

Exercice05 : $4,5pts(1pts+1pts+2,5pts)$ Soient A et B deux points distincts du plan. I et J deux point tels que :

$\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$

1) Représenter les points I et J

2) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MJ}$

3) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=2$

Solution : 1) Représentation des points I et J (voir la figure)

• $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{IA}-3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

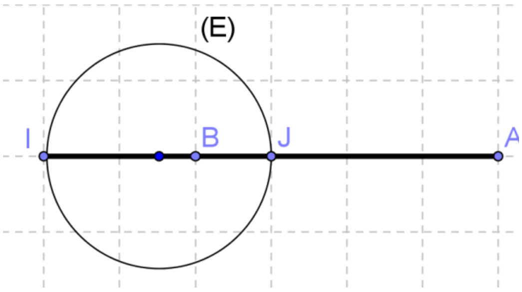
Équivaut à : $-2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

• $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{JA}+3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $4\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$



2)

• Montrons que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = -2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{MI}$ car $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan

• Montrons que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MJ}$

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 3\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right) = 4\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = 4\overrightarrow{MJ}$ car $\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MJ}$ pour tout point M du plan

3) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$?

$M \in (E)$ Équivaut à : $\frac{MA}{MB} = 3$

Équivaut à : $MA = 3MB$ Équivaut à : $MA^2 - 9MB^2 = 0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$ Équivaut à : $\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) = 0$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{MI} \cdot 4\overrightarrow{MJ} = 0$

Équivaut à : $-8\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

Équivaut à : $(MI) \perp (MJ)$

Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien